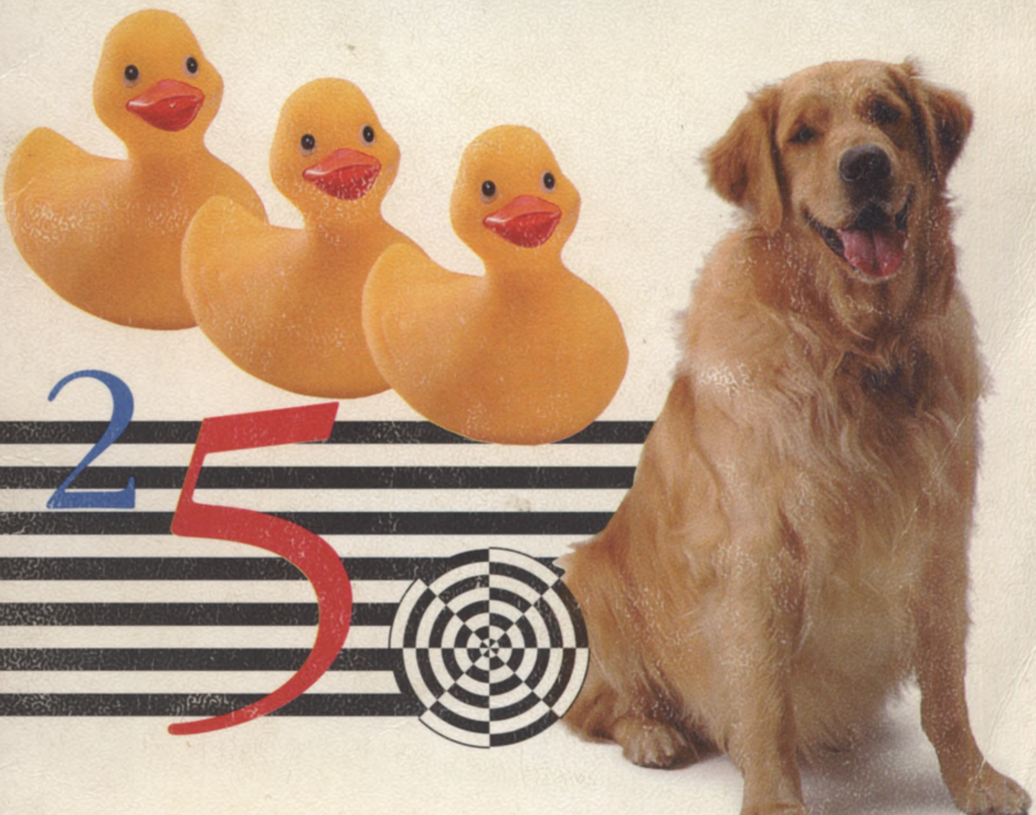
Спробуй розв'яжи

ОЛЕКСІЙ
ГУМЕНЯК

Цікаві математичні задачі



ОЛЕКСІЙ
ГУМЕНЯК

Спробуй розв'яжи

Цікаві МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ

Київ
Видавничий центр
«Академія»
1998

ББК 22.1
Г 93

Рекомендовано
Головним управлінням
загальної середньої освіти
Міністерства освіти
України

Ця книжка зацікавить не тільки тих, хто з-поміж багатьох галузей знань віддає перевагу математиці. Небайдужим до неї буде кожен, хто розуміє, наскільки важливо володіти натренованим мисленням. А розв'язування математичних задач — найкращий спосіб такого тренування. У їх формулюваннях — не тільки математична проблема, а й зорієнтована на життєві ситуації інтрига.

Учителеві це дасть змогу урізноманітнити, зробити цікавішими уроки, актуалізувати самостійну роботу учнів. Учневі — ще раз переконатися, що задача — захоплюючий сюжет, а її розв'язування — неабияка насолода. А тим, хто любить і звик тренувати своє мислення, без цієї книжки просто не обійтися.

Г $\frac{1602010000 - 001}{\text{ВЦ «Академія» — 98}}$ Без оголошення

ISBN 966-580-035-3

МАТЕМАТИЦІ МОЖНА СЛУЖИТИ, та краще — полюбити її

Я ставив перед собою завдання створити своєрідний збірник задач для тих, хто не тільки цікавиться математикою, а, незалежно від віку чи професії, вбачає у розв'язуванні задач і тренування думки, і естетичне задоволення.

Кожен знайде тут задачі для душі. Щоб дістати розв'язок будь-якої з них, спершу треба уважно прочитати, зрозуміти її умову і, врешті, побачити шлях до розв'язання. Якщо знайти розв'язок не вдається, слід ще раз і ще раз прочитати умову задачі.

Трапляється, розв'язок буває настільки простий, що згодом дивуєшся: як раніше не міг до цього додуматися. Та вміння знаходити розв'язки задач приходить не відразу, а через наполегливу, систематичну працю, нелегкі роздуми. Інколи потрібен звичайнісінький натяк, своєрідний "ключ", і складна задача, яку, здавалось би, неможливо розв'язати, стає доступною.

З цього приводу згадаймо давньогрецьку легенду.

Зодчий Дедал за наказом царя Кріту Міноса збудував лабіринт для ув'язнення чудовиська Мінотавра. Лабіринт мав величезну кількість кімнат, у кожній з яких було по кілька входів і виходів. Хто туди заходив — вийти уже не міг.

Тесей повинен був проникнути в лабіринт і вбити Мінотавра. Здійснити це допомогла Тесеєві дочка царя Міноса Аріадна, яка покохала юного героя. Царівна передала Тесеєві клубок ниток, початок якого він прив'язав при вході в лабіринт. Йдучи підземеллям, він розмотував клубок.

Читач здогадався, як Тесей повернувся назад. Розв'язком задачі — вихід з лабіринту — був клубок Аріадни.

Скажете, надто все просто. Ні, ця простота межує з геніальним відкриттям. Чи не за допомогою “клубка Аріадни” математики відшукують виходи із проблем, у яких опиняються. Але якщо трапляються нерозгадані математичні таємниці, то це означає, що не знайдено ще способу їх аналізу, тлумачення. Той, хто не потратить сили і час на аналіз, обдумування особливостей тієї чи іншої задачі, не зможе розв’язати її. І йому дуже важко буде вибратись із лабіринту математичних таємниць.

Отже, все зводиться до того, щоб здогадатися? Ніби це й так, але для щасливої здогадки треба мати досвід і знання. А досвід набувається через навчання, працю, роздуми.

Людина не може змиритися із своїм безсиллям перед недосяжним і вперто шукає.

Математика утверджує силу людини і допомагає їй осягати мету. А щасливий “клубок Аріадни” передається лише тим її обранцям, які відповіли їй взаємністю — любов’ю. Тож запрошуємо до праці, де кожна задача — своєрідний лабіринт, з якого треба самостійно знайти вихід. Правда, у другій частині книжки є “клубок Аріадни” у вигляді відповідей, але ним можна скористатися лише у крайньому разі.

Олексій Гуменяк

ЗАВДАННЯ І ЗАДАЧІ

1. ХУДОЖНИК ДОПОМАГАЄ РОЗВ'ЯЗАТИ ЗАДАЧУ

Для глибшого розуміння суті задачі її умову корисно зобразити у вигляді малюнка, схеми чи графіка. Інколи такий малюнок чи схема підкажуть хід розв'язання задачі, стануть своєрідним "клубком Аріадни". Спробуйте, і ви переконаєтеся в цьому.

1. Мама вдвічі старша за свою доньку, а вік бабусі дорівнює сумі років мами і доньки. Загальна сума років доньки, мами й бабусі дорівнює 120. Скільки років бабусі, мамі й доньці?
2. Яблуко і груша разом коштують 12 к., а три груші і два яблука — 31 к. Скільки коштує окремо одне яблуко і одна груша?
3. Яблуко і груша разом коштують 17 к. П'ять яблук і дві груші — 55 к. Скільки коштує окремо одне яблуко і одна груша?
4. Три яблука і дві груші разом коштують 44 к., а чотири яблука і дві груші — 52 к. Скільки коштує окремо одне яблуко і одна груша?
5. Чотири яблука і дві груші разом коштують 36 к., а три яблука і три груші — 39 к. Скільки коштує окремо одне яблуко і одна груша?
6. Два яблука і три груші разом коштують 36 к., а три яблука і дві груші — 34 к. Скільки коштує окремо одне яблуко і одна груша?
7. Коли б я мав ще половину тих грошей, що маю, та ще одну гривню, то в мене було б 25 гривень. Скільки в мене грошей?
8. Половина моїх грошей та ще четвертина моїх грошей, та ще 4 гривні — це і є всі мої гроші. Скільки в мене грошей?
9. Половина моїх грошей та ще третина моїх грошей, та ще 4 гривні — це і є всі мої гроші. Скільки в мене грошей?

10. Третина моїх грошей та ще четвертина моїх грошей, та ще 5 гривень — це і є всі мої гроші. Скільки в мене грошей?
11. Відомо, що число a більше за число b, а число a менше за число c ($a > b$, $a < c$). Яке з цих чисел найбільше, а яке найменше?
12. Із цифр 1, 3, 5, 6 скласти два двоцифрові числа, одне з яких у 5 разів більше за інше.
13. Із цифр 2, 4, 6, 9 скласти два двоцифрові числа, одне з яких у 4 рази більше за інше.
14. Із цифр 1, 5, 7, 9 скласти два двоцифрові числа, одне з яких у 3 рази більше за інше.
15. Із цифр 1, 2, 3, 5, 6, 9 скласти два трицифрові числа, одне з яких у 7 разів більше за інше.
16. Чи може бути в лютому п'ять понеділків?
17. Чи може в місяці одночасно бути п'ять неділь, п'ять понеділків і п'ять вівторків?
18. Чи може в місяці одночасно бути п'ять четвергів і п'ять вівторків?
19. Посудину наповнили водою. Разом вони важать 3250 г. Якщо в цю посудину влити половину води, то вони будуть важити 2 кг. Скільки важить окремо посудина і вода?
20. На запитання, скільки важить рибина, рибалка відповів: "Хвіст рибини важить 1 кг, голова важить стільки, скільки хвіст і половина тулуба разом, а тулуб — стільки, скільки хвіст і голова разом". Скільки важить рибина?
21. У хлопчика сестер і братів однаково, а у його сестри братів у 2 рази більше, ніж сестер. Скільки у сім'ї дітей?
22. Осел і кінь несли на своїх спинах вантажі. От кінь говорить ослу: "Візьми в мене один мішок, і в тебе буде у 2 рази більше мішків, ніж у мене". Осел відповів: "Ліпше ти візьми в мене один мішок, і в нас буде порівну". Скільки мішків несли кінь і осел?
23. У трьох ящиках було 450 яблук. Кількість яблук у першому ящику дорівнює половині кількості яблук у другому ящику або третині яблук у третьому ящику. Скільки яблук у кожному ящику?
24. Написати найбільше і найменше трицифрові числа, всі цифри в яких різні.
25. Написати найбільше і найменше п'ятицифрові числа, всі цифри в яких різні.

26. На подвір'ї було 3 курки і 3 індики; качок менше, ніж індиків, але більше, ніж гусей. Скільки на подвір'ї всіх птахів?
27. На подвір'ї було 4 курки і 4 індики; качок менше, ніж індиків, але більше, ніж гусей. Скільки на подвір'ї всіх птахів?
28. Скільки днів у році, якщо перший і останній його день вівторок?
29. Чи може рік розпочатися у вівторок, а закінчитися у середу?
30. Чи може рік розпочатися у п'ятницю, а закінчитися у неділю?
31. Діаметр золотого дроту дорівнює 1 мм. Із цього дроту виготовили ланцюжок. Діаметр кільця 5 мм. Яка довжина ланцюжка, якщо він має 100 кілець?
32. Діаметр дроту дорівнює 2 мм. З цього дроту треба зробити ланцюжок. Діаметр кільця 5 мм. Яка довжина ланцюжка із 100 кілець?
33. Із сірників склали дві прямокутні фігури, витративши на кожну по 8 сірників. Який із прямокутників має більшу площу? Що можна сказати про периметри прямокутників?
34. Якщо від деякого числа відняти 3, то різниця ділиться на 3. Якщо до цього числа додати 4, то сума ділиться на 4. Якщо від цього числа відняти 5, то ця різниця ділиться на 5. Знайти найменше таке число. Записати ще кілька таких чисел. Чи можна стверджувати, що шукане число ділиться на 15?
35. Три плити граніту разом важать 156 кг. Перша плита на 18 кг важча за другу, а друга на 15 кг легша від третьої. Яка маса кожної плити?

2. "МАГІЧНІ" КВАДРАТИ

"Магічні" квадрати викликають зацікавленість любителів математики, і ми охоче дамо їм можливість задовольнити свою цікавість. Проте слід зазначити, що теорія "магічних" квадратів ще далека до завершення. Скажемо, що ще не знайдено відповіді на запитання — скільки різних заповнень має квадрат четвертого порядку натуральними числами від 1 до 16 (не говорячи про заповнення іншими довільними шістнадцятьма числами). Що ж таке квадрат третього, четвертого чи іншого порядків? Порядок квадрата визначається числом відрізків, на яке поділено його сторону. Загальна задача "магічних" квадратів: дані числа розставити у клітинках квадрата так, щоб у рядках, стовпцях і діагоналях утворилися однакові суми.

Для прикладу подаємо заповнення квадрата із 16 клітинок ("магічний" квадрат четвертого порядку) натуральними числами від 1 до 16 (зауважимо, що будь-які 16 чисел, які утворюють арифметичну прогресію, можна розставити у клітинках квадрата відповідно до загальної умови).

2	5	11	16
15	12	6	1
14	9	7	4
3	8	10	13

$a+d$	$a+4d$	$a+10d$	$a+15d$
$a+14d$	$a+11d$	$a+5d$	a
$a+13d$	$a+8d$	$a+6d$	$a+3d$
$a+2d$	$a+7d$	$a+9d$	$a+12d$

У першому квадраті в рядках, стовпцях і діагоналях сума дорівнює 34, а в другому — $4a + 30d$. Третій квадрат — це приклад "магічного" квадрата Дюрера.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ми не будемо розглядати утворення похідних "магічних" квадратів четвертого порядку переміщенням стовпців, рядків та поворотом квадрата навколо центра, не зупиняємося і на "магічних" квадратах вищих порядків. Ми подаємо вичерпну відповідь на запитання, як заповнити клітинки квадрата ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ. Умову задачі у загальному вигляді сформулюємо так.

Задача. За трьома заданими числами (назвемо їх базовими) у клітинках квадрата заповнити квадрат так, щоб у рядках, стовпцях і діагоналях утворилися однакові суми. Числа в клітинках квадрата можуть повторюватися (а також можуть бути дробовими чи від'ємними).

Такі задачі можна пропонувати дітям різних вікових категорій. Для дітей молодшого віку пропонуємо найпростіший випадок, коли два із базових чисел задано по діагоналі (і до того ж одне з них — у центрі квадрата).

	7	
5	6	

1

	7	
5		6

2

	7	
	6	
5		

3

	5	
	4	3

4

	3	5
	4	

5

		3
	5	
		4

6

	5	
4	9	

7

У наступних вправах заповнення дещо ускладнюється, бо доводиться вводити змінні з використанням рівнянь.

		7
5	6	

8

		6
5		7

9

		10
6		8

10

		9
5		7

11

		5
3		4

12

		5
6		4

13

		7
10		9

14

		5
		4
		3

15

		8
		9
		7

16

		9
		8
		7

17

	9	
	8	
	7	

18

	9	
	7	
	8	

19

		12
	7	
2		

20

		7
	6	
5		

21

		7
	5	
3		

22

		7
	3	
5		

23

Якщо базові числа задано по діагоналі, то задача вимагає дослідження, а саме: має задача безліч розв'язків чи не має жодного. Отже, треба однозначно відповісти на запитання, коли заповнення квадрата єдине, коли має безліч заповнень, а коли заповнення неможливе.

Виникає здогадка (правильна здогадка, інтуїція), що коли задані по діагоналі базові числа утворюють арифметичну прогресію, то задача має безліч розв'язків, у противному разі заповнення квадрата нездійсниме. Але цю здогадку треба довести.

Нехай задані по діагоналі базові числа утворюють арифметичну прогресію: a, $a + d$, $a + 2d$. Знаючи суму членів прогресії ($3a + 3d$) і задаючи змінну x, заповнимо всі інші клітинки квадрата. Причому змінну x можна вписати в будь-яку вільну клітинку. Бачимо, що в стовпцях, рядках і діагоналях однакові суми, а саме $3a + 3d$.

$2a+2d-x$	$x-d$	$a+2d$
$x+d$	$a+d$	$2a+d-x$
a	$2a+3d-x$	x

Неважко довести: якщо задані по діагоналі базові числа a, b, c не утворюють арифметичної прогресії, то, вводячи змінну x і заповнюючи клітинки квадрата через суму і змінну, помічаємо, що сума порушується. Так, у нашому випадку в другій діагоналі дістанемо суму $3b$, а не $a + b + c$.

		c
	b	
a		x

$2b-x$	$a-b+x$	c
$c-b+x$	b	$a+b-x$
a	$b+c-x$	x

Можна також помітити, якщо базові числа в середньому рядку чи стовпці (так само як і по діагоналі) утворюють арифметичну прогресію, то задача має безліч розв'язків. Якщо базові числа в середньому стовпці чи рядку не утворюють арифметичної прогресії, то задача не має розв'язку (в котромусь із рядків, стовпців чи діагоналі сума порушується).

Слід зазначити, коли базові числа розміщені так, що жодні два із них не лежать в одному рядку, стовпці чи діагоналі, то задача розв'язку не має. У нашому випадку повинна утворитися рівність $a + 4 = b + 5$, тобто $(x + 1) + 4 = 5 + x$. Але вже на початку бачимо, що $(x + 1) + 5 \neq x + 3$. Проте необхідно відмітити, якщо при цьому базові числа утворюють арифметичну прогресію і їх середнє арифметичне займає крайнє по діагоналі положення, то задача має безліч розв'язків. Для прикладу візьмемо ті самі числа: 3, 4, 5.

a $x+1$	4	
	b x	3
5		

Отже, можемо надати x будь-яке значення і заповнити таблицю.

$x+1$	3	
	x	5
4		$x-1$

Висновок. "Магічний" квадрат третього порядку повністю розв'язаний. Ми показали умови єдиного заповнення, безлічі заповнень і неможливості такого заповнення. На конкретних та загальних прикладах зробимо відповідні підтвердження (доведення). Повернемося до відомої задачі про розміщення натуральних чисел від 1 до 9 так, щоб у рядках, стовпцях і діагоналях була сума 15. Повідомляємо, що будь-які дев'ять чисел, які утворюють арифметичну прогресію, можна розмістити згідно з даною умовою, і наводимо загальну таблицю такого заповнення (якщо $a = 1$ і $d = 1$, маємо відоме заповнення клітинок квадрата дев'ятьма першими натуральними числами).

$a+7d$	a	$a+5d$
$a+2d$	$a+4d$	$a+6d$
$a+3d$	$a+8d$	$a+d$

Пропонуємо кілька вправ для самостійного заповнення квадрата, якщо відомі три базові числа. (Повторюємо умову: щоб у рядках, стовпцях і діагоналях були рівні суми).

	7	10
	11	

24

		9
	8	
		10

25

	9	
7		8

26

	8	
	10	
11		

27

		12
8		9

28

		10
7		9

29

		13
	11	
9		

30

		7
	8	
5		

31

		10
	11	
9		

32

	7	
		9
5		

33

	5	
		9
7		

34

	9	
		5
7		

35

	9	
7	17	

36

	14	
11	26	

37

		18
12		6

38

18		
		16
10		

39

3. СЛОВО — З БУКВ, ЧИСЛО — З ЦИФР

У десятковій системі числення будь-яке число записується за допомогою десяти цифр (знаків): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Систему числення, якою користуємося, називаємо десятковою позиційною системою числення. Це значить (повторюємося), що для запису числа користуємося десятьма цифрами (знаками), кожна з яких може займати певну позицію. Коли називаємо, наприклад, тризначне число, то розуміємо, що воно записується за допомогою трьох знаків (цифр) із тих десяти, кожен з яких займає своє місце (позицію).

1. Записати найбільше і найменше чотирицифрові числа, в яких усі цифри різні.
2. Записати найбільше і найменше чотирицифрові числа цифрами 0, 1, 2, 5.
3. Записати найбільше і найменше трицифрові числа, в яких є цифри 1 і 9 (цифри не повторюються).
4. У числі 48 352 закреслити такі дві цифри, щоб утворилося: а) найбільше; б) найменше числа.
5. Із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 утворити: а) найбільше і б) найменше чотирицифрові числа.
6. Записати усі чотирицифрові числа, у кожного з яких число тисяч у 5 раз більше від числа одиниць, а число сотень на 7 більше від числа десятків.
7. Записати усі чотирицифрові числа, у кожного з яких число тисяч у 3 рази більше від числа одиниць, а число сотень на 6 більше від числа десятків.
8. Записати усі трицифрові числа, у кожного з яких число сотень на 5 більше від числа одиниць, а число десятків дорівнює числу одиниць і сотень.
9. Записати усі трицифрові числа, у кожного з яких число одиниць у 2 рази менше від числа десятків, а число десятків у 2 рази менше від числа сотень.
10. Записати:
    а) п'ятьма трійками число 100;
    б) шістьома трійками число 100;
    в) шістьома двійками число 100;
    г) вісьмома двійками число 1000;
    д) п'ятьма одиницями число 100;
    е) сімома одиницями число 1000.

11. За допомогою всіх цифр та знаків дій записати число 100. (Зауваження. У відповіді подаємо один із можливих варіантів, якщо умова не вимагає подавати усі записи.)
12. Записати усі числа, які можна утворити трьома одиницями (зрозуміло, що маємо на увазі і знаки дій).
13. У поданих нижче числах замість зірочок поставити такі цифри, щоб жодна з них не повторювалася і щоб знайдене число було: найбільшим; найменшим з усіх можливих.
а) 8***45; б) 4***237; в) 9***37; г) 48***173.
14. За допомогою п'яти двійок і знаків дій написати всі числа від 1 до 10 включно.
15. Записати найбільше і найменше числа за допомогою:
а) чотирьох одиниць;
б) трьох двійок
в) трьох трійок;
г) трьох четвірок;
д) трьох одиниць.
(*Вказівка.* Використати дію піднесення до степеня.)
16. Приписавши до одноцифрового числа зліва цифру 8, дістали число, яке у 21 раз більше від початкового. Знайти ці числа.
17. Записати усі одноцифрові числа, дописавши перед якими ще одну цифру, дістанемо числа, які в 21 раз більші від початкових.
18. Приписавши до одноцифрового числа зліва цифру 9, дістанемо число, яке в 31 раз більше від початкового. Визначити початкове і знайдене числа.
19. До одноцифрового числа приписали зліва цифру і дістали число в 11 раз більше. Знайти початкове і новоутворене числа.
20. У запису 1 2 3 4 5 6 7 8 9 поставити між деякими цифрами знак плюс або мінус так, щоб дістати число 100.
21. Скількома способами можна записати число 50 у вигляді суми двох парних чисел (записи, які відрізняються лише порядком доданків, вважати однаковими)?
22. У касира є купюри по 5 і 10 гривень. Скількома способами він може дати здачу 50 гривень?
23. У підвалі є 7 повних бочок, 7 бочок, заповнених наполовину, і 7 порожніх бочок. Як розподілити ці бочки між трьома вантажними автомобілями, щоб на кожному з них було 7 бочок і на всіх автомобілях був однаковий вантаж?
24. Пофарбований куб із стороною 12 см розрізали на кубики із стороною 2 см. У скількох кубиках пофарбовані 3 грані, 2 грані і одна грань? Скільки кубиків зовсім непофарбованих?

4. ВИХІД З ЛАБІРИНТУ

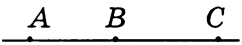
Розглянемо задачі, в яких доводиться підраховувати кількість предметів, точок, відрізків, геометричних фігур тощо. А це вже і не така проста задача, як здається на перший погляд. Якщо рахувати предмети: один, два, три..., то можна часто помилитися.

Під час підрахунку об'єктів ми будемо намагатися шукати такий метод, який сприяє уникненню помилок. Подамо деякі теоретичні відомості.

В і д р і з о к. Частина прямої, що знаходиться між двома точками (враховуючи й ці точки), називається *відрізком*.

Мал. 1

На *мал. 1* на прямій позначено відрізок AB. Точки A і B — кінці відрізка. Відрізок читатимемо AB чи BA.



Мал. 2

На *мал. 2* на прямій розміщено три відрізки: AB, AC, BC. Для стислості домовляємося читати відрізки не довільно, а впорядковано: зліва направо, і перша буква означатиме точку початку відрізка, а друга — кінець відрізка.

Мал. 3

Назвемо всі відрізки на *мал. 3*. AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Задача. Скільки відрізків зображено на *мал. 4*?

Мал. 4

В і д п о в і д ь. 10.

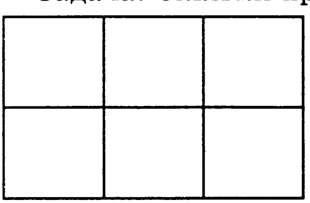
Задача. Скільки прямокутників зображено на *мал. 5*?

Мал. 5

Підрахунок прямокутників здійснюється аналогічно до підрахунку відрізків.

В і д п о в і д ь: 6.

Задача. Скільки прямокутників зображено на *мал. 6*?



Мал. 6

В і д п о в і д ь. 18. (Якщо поставити запитання — скільки квадратів, то відповідь буде: 8.)

Задача. На шахових змаганнях кожен учасник має зіграти з усіма суперниками по одній партії. Скільки всього зіграно партій, якщо в змаганнях брало участь 9 шахістів?

Розв'язати задачу можна двома способами:

І. Кожен шахіст, зрозуміло, зіграє 8 партій. Але якщо гравець A зіграв партію з гравцем $Б$, то $Б$ зіграв також із A. Отже, буде зіграно партій $9 \cdot 8 : 2 = 36$.

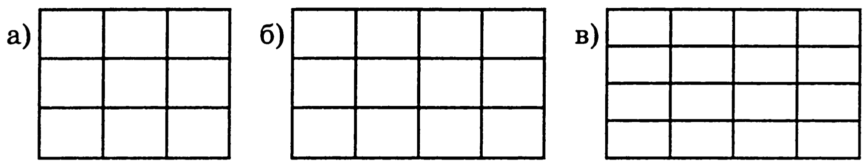
Цей спосіб розв'язання найраціональніший, бо є загальним. Індукується загальне число партій, якщо було n учасників: $n \cdot (n - 1) : 2$.

ІІ. Другий спосіб полягає в підрахунку: перший шахіст зіграє 8 партій, другий — 7 партій і т.д. Отже, зіграно: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ (партій).

Треба погодитися, що цей спосіб не дуже ефективний.

Подаємо кілька аналогічних задач.

1. Скільки прямокутників зображено на малюнках?



2. 10 точок розміщені так, що жодні 3 з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через ці точки?
3. 20 учасників ювілейної зустрічі обмінялися один з одним фотознімками. Скільки було знімків?
4. 8 міст сполучені авіалініями. Скільки створено авіаліній?
5. Скільки треба знаків (цифрових знаків), щоб пронумерувати в книжці: а) 95 сторінок; б) 121 сторінку; в) 143 сторінки?
6. Яке число знаків (парне чи непарне) потрібне, щоб пронумерувати книжку, в якій не менше 10 і не більше 99 сторінок?
7. Треба пронумерувати сто кімнат у готелі, скільки потрібно для цього виштампувати: а) одиниць; б) двійок; в) дев'яток; г) нулів?
8. Скільки всього діагоналей можна провести в: а) п'ятикутнику; б) десятикутнику; в) двадцятикутнику; г) n-кутнику?

5. ЗАДАЧІ НА КМІТЛИВІСТЬ

Відносити якусь задачу до розділу "на кмітливість" погодьтеся, справа суб'єктивна.

Бути кмітливим — це вміти здогадатися. Та під кмітливістю і здогадливістю в царині математики ми розуміємо логічність мислення. І цілком правомірно, бо під час розв'язування будь-якої задачі треба вміти шукати і знаходити.

Якщо якась із задач не піддається розв'язуванню, то слід спробувати розв'язати аналогічну, але простішу задачу, а потім з набутими здогадками повертатись до попередньої.

1. 5 робітників за 5 год викопують 5 м канави. Скільки робітників викопають 100 м канави за 100 год?
2. Трійка коней (одна упряжка) пробігла за годину 24 км. Скільки кілометрів за цей час пробіг кожен кінь?
3. Тимко сказав: "У мене 10 марок, а в тебе, Сашко, скільки?" Сашко відповів: "У мене стільки марок, скільки і в тебе, та ще половина всіх моїх марок". Скільки марок у Сашка?
4. Бабусі треба підсмажити 6 котлет, а на сковорідці вміщаються лише 4. Кожну котлету треба смажити 5 хв з одного боку і 5 хв з другого. Скільки часу потрібно для того, щоб підсмажити 6 котлет на цій сковорідці? Як це можна зробити за 15 хв?
5. Онук запитав у дідуся: "Скільки тобі років?" Дідусь відповів: "Якщо проживу ще половину того, що прожив, та ще 1 рік, то мені буде 100 років". Скільки років дідусеві?
6. Як, маючи дві посудини на 9 і 4 л, принести з річки 6 л води?
7. Десятилітрова посудина наповнена молоком. Маючи ще банки на 5 і 3 л, як відміряти 4 л молока?
8. Десятилітрова посудина наповнена молоком. Маючи банки на 7 і 3 л, як відміряти 4 л молока?
9. З трьох однакових за зовнішнім виглядом кульок одна легша від інших. Як одним зважуванням на шалькових терезах без важків визначити найлегшу кульку?
10. З дев'яти однакових за зовнішнім виглядом монет одна фальшива (легша). Скільки треба провести зважувань на шалькових терезах без важків, щоб знайти фальшиву монету?
11. З двадцяти семи однакових за зовнішнім виглядом монет одна фальшива (легша). Скількома зважуваннями на

шалькових терезах без важків можна відшукати фальшиву монету?

12. Як за допомогою шалькових терезів без гир відважити 14 кг цукру, якщо в торбині є 16 кг цукру?
13. У ящику 8 кг крупи. Треба за допомогою шалькових терезів і двох гир по 400 г відважити 1 кг 800 г крупи. Як це зробити двома зважуваннями?
14. З восьми зовні однакових деталей одна легша за інші. Як її виявити двома зважуваннями на шалькових терезах без гир?
15. Чи може мати місяць одночасно п'ять неділь і п'ять серед або п'ять неділь і п'ять вівторків, або п'ять неділь і п'ять понеділків?
16. Яких однакових п'ять днів може бути в лютому?
17. Як розрізати смужку завдовжки 2 м 16 см на такі дві частини, щоб одну з них можна було порізати на смужки по 5 см, а другу — на таку саму кількість смужок по 3 см?
18. У трьох братів разом є 9 олівців. У молодшого — на 1 олівець менше, а в старшого — на 1 олівець більше, ніж у середнього брата. Скільки олівців у кожного із братів?
19. Якби Коля купив три зошити, то в нього залишилося б 11 к., а коли б він захотів купити 9 таких зошитів, то йому не вистачило б 7 к. Скільки грошей у Колі?
20. Розповідають, що в школі, де навчався в дитячі роки Карл Гаусс, який став згодом відомим математиком, учитель, щоб зайняти учнів класу на тривалий час самостійною роботою, запропонував обчислити суму всіх натуральних чисел від 1 до 100. Але малий Гаусс це завдання виконав майже моментально. Як він це зробив?
21. Знайти значення виразів:
а) $1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97 + 99$
б) $1 + 3 + 5 + \ldots + 995 + 997 + 999$
в) $99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + \ldots + 11 - 9 + 7 - 5 + 3 - 1$
г) $5 + 10 + 15 + \ldots + 90 + 95 + 100$
д) $3 + 6 + 9 + \ldots + 93 + 96 + 99$
22. Скількома нулями закінчується добуток:
а) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11$;
б) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21$;
в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 26$;
г) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 51$;
д) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$?

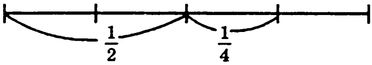
23. Які знаки арифметичних дій (можна використовувати й дужки) треба записати між вісьмома двійками, розміщеними одна за одною, щоб результат цих дій дорівнював: а) 8? б) 3? в) 12? г) 1? д) 20?
24. Яке ціле число без остачі ділиться на будь-яке ціле число, відмінне від 0?
25. Сума яких двох чисел дорівнює їх добутку?
26. Сума яких двох натуральних чисел більша, ніж їх добуток?
27. Якими цифрами закінчуються:
а) квадрат натуральних чисел?
б) куб натуральних чисел?
в) четвертий степінь натуральних чисел?
28. Чи можуть числа 468, 533, 672 бути:
а) квадратами цілого числа?
б) кубами цілого числа?
29. Що більше: 10^{16} чи 20^8?
30. Що більше: 100^{18} чи 9500^9?
31. Чи можна 5 яблук розділити між 6 хлопчиками порівну, щоб не довелося розрізати жодного яблука більше, ніж на 3 частини?
32. Чи можна 7 яблук розділити порівну між 12 хлопчиками, якщо кожне яблуко можна розрізати не більше як на 4 частини?
33. Знайти найменше число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, при діленні на 3 дає остачу 2, при діленні на 4 дає остачу 3, при діленні на 5 дає остачу 4 і при діленні на 6 дає остачу 5.
34. Знайти найменше число, яке при діленні на 7 дає остачу 6, а при діленні на 8 дає остачу 7.
35. Потяг проїжджає міст завдовжки 450 м за 45 с, а повз будиночок стрілочника — за 15 с. Визначити довжину потяга і його швидкість.
36. Відомо, що в кошику менше, ніж 100 яблук. Їх можна розкласти порівну на 2, 3 і 5 купок, але не можна розкласти порівну на 4 купки. Скільки яблук у кошику?
37. Довести, що сума будь-яких трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.
38. Довести, що сума будь-яких п'яти послідовних цілих чисел ділиться на 5.
39. Довести, що сума будь-яких чотирьох послідовних парних чисел не ділиться на 8.
40. Три дроби з чисельником 1 і різними знаменниками в сумі дають 1. Знайти ці дроби.

41. Довести, що будь-яке число, записане трьома однаковими цифрами, ділиться на 37.
42. Довести, що будь-яке число, записане шістьма однаковими цифрами, ділиться на 37.
43. Добуток двох цілих чисел дорівнює 217. Знайти ці числа, якщо кожне з них менше, ніж 7.
44. Добуток двох цілих чисел дорівнює 385. Знайти ці числа, якщо кожне з них менше, ніж 15.
45. Довести, що: а) сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4; б) добуток двох послідовних парних чисел ділиться на 8.
46. Знайти такі чотири послідовних натуральних числа, щоб добуток останніх двох чисел був більший за добуток двох перших на 86.
47. Знайти такі чотири послідовних непарних числа, щоб добуток крайніх чисел був на 8 одиниць менший, ніж добуток середніх.
48. Знайти три послідовних натуральних числа, коли відомо, що різниця між квадратом другого числа і добутком першого та третього чисел дорівнює 1.
49. Якщо під час ділення натурального числа на 25 остача дорівнює 5, то квадрат цього числа кратний 25. Довести.
50. Якщо під час ділення кожного з двох натуральних чисел на 25 остача дорівнює 5, то добуток цих натуральних чисел ділиться на 25. Довести.

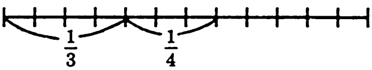
6. ОДИНИЦЯ — КОМАНДИР ДРОБІВ

Задачі на дроби дуже важливі, в них закладено значний навчальний потенціал. Розв'язувати такі задачі допомагає уміння ілюструвати їх на відрізку (моделювати їх на малюнку — крузі, прямокутнику тощо). А для цього треба вміти відкладати частини відрізка одна за одною, а також ділити відрізок та його частини на ще дрібніші частини.

Наведемо приклади відкладання частин відрізка одна за одною. Нехай потрібно відкласти $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{4}$ частини відрізка. Неважко це зробити, якщо уявити, що відрізок поділено на 4 рівних частини: $\frac{1}{2}$ означає дві такі частини, $\frac{1}{4}$ — одну частину.



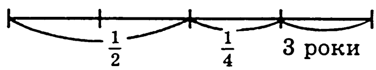
Очевидно, на відрізку залишилася $\frac{1}{4}$ частина відрізка. Аналогічно відкладаємо $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$ частини відрізка. Зручно розділити відрізок на 6 рівних частин (нагадаємо, що поділ здійснюється схематично на рівні частини). Залишилася $\frac{1}{6}$ частина відрізка. Подібним способом відкладаємо $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{4}$ частини відрізка. Зрозуміло, що тепер відрізок зручніше розділити на 12 рівних частин. Залишилося на відрізку $\frac{5}{12}$, бо відкладено $\frac{7}{12}$.



Цього достатньо для ілюстрації розв'язку багатьох задач.

Задача. Хлопчика спитали, скільки йому років. Він відповів: "Половина моїх років, четвертина моїх років і ще три роки — то всі мої роки".

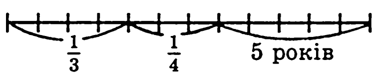
Поговоримо про розв'язування задачі. Якщо помітити, що на $\frac{1}{4}$ відрізка припадає 3 роки, то можна відразу сказати, що хлопчикові 12 років.



Задача. Хлопчика спитали, скільки йому років. Він відповів: "Третина моїх років, та четвертина моїх років, та ще 5 років — то і є всі мої роки". Скільки років хлопчикові?

Задача повністю аналогічна попередній. Але тепер відрізок (довільний) треба розділити на 12 рівних частин. Якщо тепер відкласти $\frac{1}{3}$ і $\frac{1}{4}$ частини років, то на малюнку "висвітлюється" розв'язання задачі.

Одна частина відрізка $(\frac{1}{12})$ відповідає одному року хлопчика.



Відповідь. Хлопчикові 12 років.

1. Купленого зерна курям вистачає на 2 місяці, качкам — на 3 місяці. На скільки часу вистачить цього зерна, якщо годувати курей і качок разом?
2. Знайти число, одна третя і одна четверта якого дорівнюють 21.
3. Знайти число, одна четверта і одна п'ята якого становлять 18.
4. Знайти число, півтретина якого дорівнює 60.
5. Котра тепер година, якщо до кінця доби залишилося $\frac{4}{5}$ того часу, що вже минув від початку доби?

6. Місяць квітень починається з понеділка. Який буде день (назва і дата), якщо мине а) $\frac{3}{5}$ місяця; б) $\frac{4}{5}$ місяця; в) $\frac{5}{6}$ місяця; г) $\frac{3}{10}$ місяця; д) $\frac{7}{15}$ місяця?
7. Велосипедист має приїхати в пункт призначення у певний час. Якщо він їхатиме зі швидкістю 15 км/год, то прибуде на годину раніше, а якщо зі швидкістю 10 км/год, то спізниться на 1 годину. З якою швидкістю має їхати велосипедист, щоб прибути вчасно?
8. Собака погнався за лисицею, яка перебувала від нього на відстані 120 м. Через який час собака наздожене лисицю, якщо та пробігає за хвилину 320 м, а собака — 350 м?
9. Собака побачив зайця на відстані 100 м і погнався за ним. Через який час собака наздожене зайця, якщо він пробігає за хвилину 350 м, а собака 370 м?
10. На одну шальку терезів поклали шматок сиру, а на другу $\frac{3}{4}$ такого самого шматка і ще $\frac{3}{4}$ кг, внаслідок чого встановилася рівновага. Скільки важить шматок сиру?
11. За книгу заплатили 60 грн. та ще $\frac{1}{3}$ її вартості. Скільки коштує книга?
12. Заповнена повністю посудина важить 8 кг, а заповнена до $\frac{3}{4}$ місткості — 6,5 кг. Скільки води вміщає посудина?
13. Довжина товарного потяга 1 км, і він рухається зі швидкістю 50 км/год. За який час він проїде тунель завдовжки 1 км. Відповідь подати в годинах і хвилинах.
14. У магазині картоплю розфасовано в 24 пакети по 5 кг і по 3 кг. Вага всіх пакетів по 5 кг виявилась рівною вазі всіх пакетів по 3 кг. Скільки було тих та інших пакетів?
15. Собака погнався за лисицею, яка була на відстані 30 м від нього. Стрибок собаки дорівнює 2 м, а лисиці — 1 м. За один і той самий час лисиця робить 3 стрибки, а собака — 2. Яку відстань треба пробігти собаці, щоб наздогнати лисицю?
16. Вантажний автомобіль проходить деяку відстань за 10 годин. Якби його швидкість була на 10 км/год більшою, то автомобіль затратив би на дорогу 8 год. Визначити відстань і швидкість руху автомобіля.

7. СТАРОДАВНІ ЗАДАЧІ

Під таким заголовком подаємо задачі, що прийшли до нас із глибокої давнини. В цих задачах закладено значний потенціал логічного мислення. Трапляються між ними задачі й досить складні за логічною структурою. Хоча б, для прикладу, задача Магавіри — індійського математика IX століття. Учений високо цінував математику і сам зробив досить значний внесок у її розвиток. Такі задачі доводиться розв'язувати за допомогою рівнянь, оскільки моделювати їх досить складно.

1. Летів табун гусей, а назустріч їм летів один гусак і каже: "Добридень вам, сто гусей!" "Нас не сто гусей, — відповідає йому вожак табуна, — якби нас було стільки, скільки тепер, та ще стільки, та півстільки, та чверть стільки, та ще ти, гусаку, з нами, тоді нас було б сто гусей". Скільки в табуні гусей?
2. Розповідають, що на запитання, скільки в нього учнів, давньогрецький математик Піфагор відповів так: "Половина моїх учнів вивчає математику, четверта частина вивчає природу, сьома частина проводить час у мовчазних роздумах, іншу частину складають 3 діви". Скільки учнів було в Піфагора?
3. (Із задачника Магницького.) Один чоловік вип'є діжку пива за 14 днів, а із своєю дружиною вони вип'ють ту діжку за 10 днів. За скільки днів дружина сама змогла б випити те пиво з діжки?
4. (Із математичного рукопису XVII ст.) Віл з'їв пласт сіна за годину, кінь з'їв пласт сіна за дві години, а коза з'їла такий самий пласт за 3 години. За який час вони всі троє з'їли б той пласт сіна?
5. (Із стародавнього Єгипту.) У пастуха, який вів 70 биків, запитали: "Яку частину биків своєї численної череди ти ведеш?" Він відповів: "Я веду дві третини від третини худоби". Скільки биків було у всій череді?
6. (Із стародавнього Єгипту.) Площа поля дорівнює 100 квадратним ліктям. Поділити поле на дві квадратні частини так, щоб довжина сторони однієї частини дорівнювала $\frac{3}{4}$ довжини сторони другої частини.

7. (Із тверджень Архімеда.) Площа круга, описаного навколо квадрата, вдвічі більша за площу круга, вписаного в квадрат. Довести.
8. (З Бахшалійського рукопису.) Із чотирьох жертводавців другий дав удвічі більше, ніж перший, третій — втричі більше, ніж другий, четвертий — вчетверо більше, ніж третій, а всі разом дали 132. Скільки дав перший?
9. (Задача Ананія Ширакаці.) Один купець пройшов через три міста. У першому місті від нього взяли половину і третину майна, у другому — половину і третину з того, що у нього залишилося, у третьому — знову половину і третину того, що у нього було. Коли він прибув додому, у нього залишилося 11 грошів. Скільки всього грошів було спочатку у купця?
10. В Афінах була водойма з трьома трубами. Перша могла наповнити водойму за 1 год, друга — за 2, третя за 3. За який час усі 3 труби разом могли наповнити водойму?
11. (Задача Магавіри.) Під час бою півнів один з глядачів домовився з двома власниками півнів. Першому він сказав: “Якщо переможе твій півень, то виграш віддаси мені, якщо ж програєш, то я сплачу тобі $\frac{2}{3}$ твого можливого виграшу”. Другому учаснику він сказав: “Якщо переможе твій півень, то виграш віддаєш мені, якщо ж програєш, я сплачу тобі $\frac{3}{4}$ можливого виграшу”. В обох випадках глядач одержить 12 монет. Який мав бути виграш кожного учасника бою?
12. (Задача Сунь-Цзи, китайського математика III ст.) Два чоловіки A і B одержали деяку кількість монет, які треба розділити між ними так, що коли до монет A додати половину монет B або до монет B додати $\frac{3}{4}$ монет A, то в обох випадках дістанемо 48. Скільки монет одержав кожний чоловік?
13. (Задача Ісаака Ньютона). Два листоноші A і B, між якими 59 миль, виїжджають уранці назустріч один одному. Листоноша A проїжджає за 2 год 7 миль, B — за 3 год 8 миль, при цьому B вирушає в дорогу на годину пізніше, ніж A. Скільки миль проїде A до зустрічі з B?
14. У двоцифровому числі закреслили одну цифру. Вийшло число у 31 раз менше від початкового. В якому числі, крім 31, і яку закреслили цифру?

15. У двоцифровому числі закреслили одну цифру. Вийшло число в 41 раз менше від початкового. В якому числі, крім 41, і яку закреслили цифру?

16. Два туристи, маючи один велосипед, повинні за півтори години подолати шлях 12 км. Відомо, що на велосипеді кожний з них може рухатися із швидкістю 20 км/год, а пішки 5 км/год. Чи зможуть туристи пройти маршрут без запізнення, якщо на велосипеді одночасно вдвох їхати не можна? Зробити схему-розрахунок руху туристів.

17. У ящику лежать різнокольорові кульки: 5 білих, 12 червоних і 20 чорних. Яку найменшу кількість кульок треба взяти з ящика, не заглядаючи всередину, щоб серед них обов'язково були: а) хоча б по одній кульці названих кольорів; б) 10 кульок одного кольору?

18. Приїхало 100 туристів. З них 20 чоловік не знали ні німецької мови, ні французької, 78 знали французьку і 65 знали німецьку. Скільки туристів знали і німецьку, і французьку мови?

19. Із 100 туристів 10 не знали ні німецької, ні французької, ні англійської мов. 72 знали англійську мову, 65 знали французьку, 60 знали німецьку. Скільки туристів знали англійську, французьку і німецьку мови?

20. Перше число складає 40% другого. Скільки відсотків складає друге число від першого?

21. Під час опитування 100 учнів з'ясувалося, що 48 із них виписують журнал "Барвінок", 34 — "Соняшник", а 27 виписують обидва ці журнали. "Юний технік" виписали 20 учнів, і усі вони не виписали жодного іншого журналу. Скільки з опитаних учнів зовсім не виписують журналів?

22. Сума двох чисел більша за перше на 7, а за друге — на 6. Чому дорівнює ця сума?

23. Сума чотирьох послідовних цілих чисел дорівнює 66. Знайти ці числа.

24. У двох класних кімнатах 68 учнів. Коли з першої кімнати вийшли 20 учнів, а з другої 30 учнів, то в цих кімнатах залишилося учнів порівну. Скільки учнів у кожній кімнаті?

25. (Задача Льюіса Керрола). У жорстокому бою 70 із 100 піратів втратили око, 75 — одне вухо, 80 дістали поранення в руку, а 85 — поранення в ногу. Яка мінімальна кількість могла бути тих, хто дістав одночасно усі чотири поранення?

8. ПРОСТЕ — В СКЛАДНОМУ, СКЛАДНЕ — В ПРОСТОМУ

Подільність чисел — це складова вчення про натуральне число. Натуральні числа — це числа, якими лічимо предмети: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 і т.д. Зрозуміло, що наступне натуральне число дістанемо, додавши до попереднього 1. Таким чином, ряд натуральних чисел нескінченний, тобто не існує найбільшого натурального числа. Бо якщо допустити, що N — найбільше натуральне число, то очевидно $N + 1 > N$.

Натуральний ряд чисел має безліч різних послідовностей. Зацікавлення викликають натуральні числа, що діляться на інші натуральні числа. Була створена захоплююча прикладна теорія подільності.

Але натуральний ряд чисел має таємниці, не відгадані людством і донині. Наприклад, невідома закономірність утворення послідовності простих чисел. Нагадаємо, що прості числа — це такі, що діляться лише на 1 і самі на себе. Це — 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37... Але відомо, що послідовність простих чисел нескінченна. Що це — істина, заявив ще Евклід і підтвердив теоремою. Доведення цієї теореми досить повчальне в своїй логічній структурі, її годиться навести.

Теорема Евкліда: ***"Не існує найбільшого простого числа"***, або ***"ряд простих чисел нескінченний"***.

Розглянемо числа, утворені таким чином:

$2 \cdot 3 + 1 = 7$ — просте

$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ — просте

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$ — просте

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$ — просте.

Але це зовсім не означає, що всі числа, утворені таким способом, будуть простими. Бо вже $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031$ — складене ($30031 = 59 \cdot 509$).

Суть твердження Евкліда полягає у розгляді рівності $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ \ldots \ \cdot P + 1 = N$.

З припущення, що P — найбільше просте число, випливає, що N — або просте, або розкладається на прості множники, кожен з яких більший від P (оскільки N не ділиться на жодне просте число до P включно). Конкретний приклад: $59 > 13$, $509 > 13$.

Це один з прикладів погляду на “очевидне”. Тож приходимо до висновку, що будь-яке твердження треба довести. Та ще зауважимо, що доведення твердження Евкліда є прикладом строгого і тонкого доведення. А це привчає до розуміння “очевидності”, вміння відрізняти істину від її подоби.

Отже, повторюємося, досі ще невідома закономірність утворення ряду простих чисел.

Невідомо також, скінченна чи нескінченна послідовність простих чисел — “близнят”: 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13, 17 і 19, 41 і 43 і т.д.

Тут ми спочатку пропонуємо простіші задачі, для розв’язання яких потрібно знати ознаки подільності чисел на 2, 4, 3, 5, 9. Із збільшенням номера задачі ускладнюватимуться.

1. Записати кілька трицифрових чисел, що діляться на 3.
2. Записати кілька парних трицифрових чисел, що діляться на 9.
3. Записати кілька чотирицифрових чисел, що діляться одночасно на 3 і 5.
4. Записати кілька чотирицифрових чисел, що діляться одночасно на 4 і 9.
5. Записати кілька чотирицифрових чисел, що діляться одночасно на 4, 5 і 9.
6. Із цифр 0, 1, 2, 3 записати найбільше і найменше чотирицифрові числа, які діляться на: а) 3; б) 6; в) 12.
7. Скласти найбільше і найменше чотирицифрові числа з різними цифрами, які діляться на 18.
8. Скласти найбільше і найменше чотирицифрові числа, які діляться на 18.
9. Чи ділиться число $\underbrace{111111\ldots1}_{27\text{ раз}}$ на 27?
10. Чи ділиться число $\underbrace{111111\ldots1}_{36\text{ раз}}$ на 27?
11. Чи ділиться число $\underbrace{111111\ldots1}_{81\text{ раз}}$ на 81?
12. Перша зліва цифра чотирицифрового числа 7. Якщо її переставити на останнє місце, то буде число, яке на 864 менше за початкове. Знайти початкове число.
13. Перша зліва цифра чотирицифрового числа 6. Якщо її переставити на останнє місце, то буде число, яке на 855 менше за початкове. Знайти початкове число.

14. Перша зліва цифра шестицифрового числа 1. Якщо її переставити на останнє місце, то буде число, яке втричі більше за початкове. Знайти початкове число.
15. Перша зліва цифра шестицифрового числа 2. Якщо її переставити на останнє місце, то буде число, яке втричі більше за початкове. Знайти початкове число.
16. Чи існує кількацифрове число, щоб, переставивши першу зліва цифру на останнє місце, дістати число, яке в 2 чи 4 рази більше від початкового?
17. Знайти всі чотирицифрові числа, в яких, переставивши першу зліва цифру на останнє місце, дістають число, яке в кілька разів більше за початкове.
18. Якщо між цифрами двоцифрового числа вписати те саме двоцифрове число, то утворене чотирицифрове число буде більше від початкового у 77 раз. Знайти це число.
19. Знайти два натуральних числа, сума яких дорівнює 168, а їх найбільший спільний дільник дорівнює 34.
20. Знайти трицифрове число, яке дорівнює квадрату двоцифрового і кубу одноцифрового числа.
21. Як розмістити 45 кролів у 9 клітках, щоб у всіх клітках була різна кількість кролів?
22. Довести, що значення виразу $11^6 + 14^6 - 13^3$ кратне 10.
23. Довести, що значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ кратне 10 при будь-якому натуральному значенні n.
24. Розмістити числа $a = 2^{45}$, $b = 3^{36}$, $c = 4^{27}$, $d = 5^{18}$ в порядку зростання. Відповідь обґрунтувати.
25. Знайти найменше натуральне число, яке при множенні на 2 стає квадратом, а при множенні на 3 — кубом натурального числа.
26. Чи може різниця двох трицифрових чисел, з яких друге записане тими самими цифрами, що й перше, але у зворотному порядку, бути квадратом якого-небудь натурального числа?
27. Що більше: $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$ чи $\frac{10^{11}+1}{10^{12}+1}$?
28. Знайти остачу при діленні $21^{18} + 24^{19} + 45^7$ на 15.
29. Знайти остачу при діленні:
а) $21^{20} + 24^{18}$ на 5; на 10;
б) $21^{20} + 9 \cdot 24^{18}$ на 5; на 10.
30. Знайти остачу при діленні:
а) 16^3 на 3; б) 16^4 на 3;
в) 16^5 на 3; г) 16^{10} на 3.

31. Довести, що 16^n (де n — натуральне) при діленні на 3 дає остачу 1.
32. Знайти остачу при діленні:
а) 26^3 на 3; б) 26^4 на 3;
в) 26^5 на 3; г) 26^6 на 3.
33. Знайти остачу при діленні 26^n на 3.
34. Знайти остачу при діленні 46^n на 5.
35. Знайти остачу при діленні: а) 23^5 на 5; б) 23^6 на 5; в) 23^7 на 5.
36. Знайти остачу при діленні 14^5 на 4.
37. Скільки дільників має число 6^4?
38. Скільки дільників має число 15^5?
39. Скільки дільників має число 12^6?
40. Довести, що вираз $p^2 - 1$ кратний 24, якщо p — просте число, більше ніж 3.

Для розв'язування наступних задач доцільно розглянути такі:

Задача. Довести, якщо p — просте число і $p > 3$, то $(p^4 - 1) \,\vdots\, 48$.

Доведення. Розкладемо $p^4 - 1$ на множники $(p^2 - 1)(p^2 + 1)$. Відомо, що $(p^2 - 1) \,\vdots\, 24$ (задача 40), а $(p^2 + 1)$ — парне. Отже, $(p^4 - 1) \,\vdots\, 48$.

Задача. Довести, якщо p — просте число і $p > 3$, то $(p^8 - 1) \,\vdots\, 96$.

Доведення. $p^8 - 1 = (p^4 - 1)(p^4 + 1)$. Вище доведено, що $(p^4 - 1) \,\vdots\, 48$, а $(p^4 + 1)$ — парне. Отже, $(p^8 - 1) \,\vdots\, 96$.

41. Знайти всі прості числа p і q, для яких $p^2 - 2q^2 = 1$.
42. Довести, що різниця між квадратом натурального числа, яке не кратне 3, і числом 1, кратна 3.
43. У касира було 46 двадцятип'ятикопійкових і десятикопійкових монет на загальну суму 8 грн. 35 коп. Скільки було монет обох видів?
44. Довести, що сума чотирьох послідовних натуральних степенів числа 3 кратна 120.
45. Скільки серед перших десяти тисяч таких чисел, які закінчуються одиницею і можуть бути подані у вигляді $8^m + 5^n$?
46. Сума $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12}$ закінчується одиницею. Якими цифрами закінчуються числа a, b, c, d?
47. Довести, що число $3^{4n} + 44$ ділиться на 5 (n — натуральне число).

48. Довести, що число $37^8 + 9$ ділиться на 10.
49. Довести, що число $64^{64} - 1$ ділиться на 5.
50. Довести, що число $n^{25} - n^{13}$ ділиться на 10, де n — натуральне число.
51. Довести, що число $27^{12} + 72^{10} + 45^8$ ділиться на 30.
52. При яких натуральних показниках a, b, c число $27^a + 72^b + 45^c$ ділиться на 30?
53. Якою цифрою закінчується число $45^n + 33^{4n+1} + 51^{3n}$, де n — натуральне число?
54. Обчислити: $2^{33} - 2^{32} - 2^{31} - \ldots - 2^2 - 2 - 1$.
55. Довести, що число $10^k - 7$ ділиться на 3, де k — натуральне число.
56. Довести, що число $2^{4n} - 1$ ділиться на 5, де n — натуральне число.
57. У шестицифровому числі однакові перша і четверта цифри, друга і п'ята, третя і шоста. Довести, що це число ділиться на 7, 11, 13.
58. Довести, що сума чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ кратна 11.
59. Довести, що сума чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ кратна 111.
60. Довести, що різниця чисел $\overline{abc}$, і $\overline{cba}$ кратна 99.
61. Знайти такі три послідовних натуральних числа, щоб квадрат середнього з них був на 1 більший, ніж добуток двох крайніх.
62. Довести, що вираз $9x + 7y$ ділиться на 17, якщо $5x + 2y$ ділиться на 17.
63. Знайти значення змінних, при яких вирази $8x + y$ і $11x + 3y$ кратні 13.
64. Знайти значення змінних, при яких вирази $5x + 2y$ і $2x + 3y$ кратні 11.
65. Натуральні числа m і n при діленні на 7 дають в остачах відповідно 5 і 3. Довести, що їх добуток при діленні на 7 дає в остачі 1.
66. Натуральні числа x і y при діленні на 11 дають в остачах відповідно 7 і 8. Довести, що їх добуток при діленні на 11 дає в остачі 1.
67. Натуральні числа a і b при діленні на 15 дають в остачах відповідно 5 і 6. Довести, що їх добуток ділиться на 15.
68. Довести, що вираз $625^3 + 175^3$ ділиться на 800.
69. У коробці лежать кульки — білі, червоні, чорні. Білих кульок у 6 раз більше, ніж чорних. Скільки кульок кожного кольору лежить у коробці, якщо їх усього 20?

70. У двоцифровому числі закреслили цифру, і воно зменшилося в 11 раз. Яку цифру і в якому числі закреслили?

71. Що більше 3^{303} чи 2^{454}?

72. Довести, що сума $2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \ldots + 2^{97} + 2^{99}$ ділиться на 5. Чи ділиться ця сума на 10?

73. Якщо до деякого п'ятицифрового числа дописати зліва цифру 6, то утвориться число, яке в 4 рази більше за число, в якого ця цифра дописана справа. Знайти це число.

74. Довести, що сума $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 1984^3$ ділиться на 1985.

75. Знайти таке п'ятицифрове число $\overline{abcde}$, щоб двоцифрові числа $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ були квадратами цілих чисел.

76. Назвати всі чотирицифрові числа, записані різними цифрами, що діляться на 180.

77. Назвати всі чотирицифрові числа, записані різними цифрами, що діляться на 360.

78. Знайти закон утворення числового ряду:

1) 6, 8, 16, 18, 36, ... ;
2) 15, 24, 35, 48, 63, ...;
3) 9, 11, 31, 33, 53, ...;
4) 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, ...;
5) 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, ...;
6) 7, 11, 15, 19, 23, ...;
7) 7, 9, 11, 13, 15, ...;
8) 5, 7, 11, 19, 35, ...;
9) 5, 14, 29, 83, 245, ...;

79. Знайти закон утворення числового ряду і записати його попередні члени:

1) ..., 10, 12, 14, 16, ...;
2) ..., 12, 15, 18, 21, ...;
3) ..., 11, 14, 17, 20, ...;
4) ..., 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, ...;
5) ..., 7, 14, 15, 30, 31, 62, ...;
6) ..., 30, 35, 70, 75, 150, 155, ...;
7) ..., 7, 12, 9, 14, 11, 16, 13, ...;
8) ..., 16, 18, 36, 38, 76, ...;
9) ..., 62, 310, 312, 1560, ...

80. Знайти всі пари натуральних чисел, для яких НСК (найменше спільне кратне) дорівнює 336, а НСД (найбільший спільний дільник) дорівнює 12.

Умову задачі можна записувати за допомогою такої символіки, а саме: знайти (x; y), якщо НСК (x; y) = 336; а НСД (x; y) = 12.

81. НСК (x; y) = 168, НСД (x; y) = 24. Знайти (x; y).

82. НСК (x; y) = 168, НСД (x; y) = 12. Знайти (x; y).

83. НСК (x; y) = 210, НСД (x; y) = 15. Знайти (x; y).

84. НСК (x; y) = 420, НСД (x; y) = 30. Знайти (x; y).

85. НСК (x; y) = 1260, НСД (x; y) = 105. Знайти (x; y).

86. НСК (x; y) = 1260, НСД (x; y) = 30. Знайти (x; y).

87. НСК (x; y) = 2310, НСД (x; y) = 77. Знайти (x; y).

88. Знайти всі трійки різних чисел, для яких НСК дорівнює 420, а НСД дорівнює 12.

9. З ЦАРИНИ ПОХІДНИХ ЗАДАЧ

Пропонуємо кілька задач, кожну з яких можна використати для конкурсів чи олімпіад. Але якщо знати розв'язування основної задачі, то всі інші — мають її "ключ" для розв'язання.

Мова йде про вже пропоновані раніше задачі, а саме: що $p^2 - 1$ ділиться на 24 (40, с. 29) і $p^4 - 1$ ділиться на 48, якщо $p > 3$ і p — просте (оскільки $p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1)$ і знаємо, що $(p^2 - 1) \vdots 24$, а $(p^2 + 1) \vdots 2$).

1. Довести, що коли p — просте і $p > 3$, то вказані двочлени діляться на 24:

а) $p^2 + 23$; б) $p^2 - 25$; в) $p^2 + 71$; г) $p^2 - 73$; д) $p^2 + 119$;
е) $p^2 - 121$.

Для доведення вказаних тверджень треба врахувати, що:

а) $23 = -1 + 24$, і тоді $p^2 + 23 = p^2 - 1 + 24$ ділиться на 24.

б) $-25 = -1 - 24$, і тоді $p^2 - 25 = p^2 - 1 - 24$ ділиться на 24.

в) $71 = -1 + 72$, і тоді $p^2 + 71 = p^2 - 1 + 72$ ділиться на 24 і т.п.

2. Довести, що якщо p — просте число і $p > 3$, то:

а) $p^4 + 47$; б) $p^4 - 49$; в) $p^4 + 95$; г) $p^4 - 97$ діляться на 48.

Для доведення вказаних тверджень треба врахувати, що:

а) $47 = -1 + 48$, і тоді $p^4 + 47 = p^4 - 1 + 48$ ділиться на 48.

А далі — аналогічні міркування.

3. Довести, що якщо p — просте і $p > 3$, то:

а) $p^2 + 2$ при діленні на 24 дає остачу 3;

б) $p^2 + 3$ при діленні на 24 дає остачу 4;

в) $p^2 + 15$ при діленні на 24 дає остачу 16.

Для доведення зазначених тверджень треба врахувати, що, наприклад: а) $p^2 + 2 = (p^2 - 1) + 3$ і т.д.

4. Знайти остачі при діленні:

а) $p^2 + 7$ на 24; б) $p^2 - 9$ на 24; в) $p^4 - 13$ на 48; г) $p^4 + 11$ на 48, якщо p — просте і $p > 3$.

Ми вже знаємо, що $p^2 - 1$ ділиться на 24, а $p^4 - 1$ ділиться на 48 (при заданих умовах).

Зробивши перетворення (для виразів вправи 4), будемо мати:

а) $p^2 + 7 = p^2 - 1 + 8$. Отже, остача 8.

б) Остача 16, оскільки $p^2 - 9 = p^2 - 1 - 8 - 16 + 16 = p^2 - 1 - 24 + 16$. Адже $(p^2 - 1 - 24) \vdots 24$.

в) $p^4 - 13 = p^4 - 1 - 12 - 36 + 36 = (p^4 - 1 - 48) + 36$. Отже, остача 36.

г) Зробимо перетворення: $p^4 + 11 = p^4 - 1 + 12 = (p^4 - 1) + 12$. Отже, остача 12.

10. І ЩЕ РАЗ ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ ЧИСЕЛ

Ми стоїмо перед проблемою охоплення безлічі ознак подільності, а саме — пошуком якогось загального (універсального) правила подільності. І якщо б удалося наблизитися до розв'язання цієї проблеми, то можна було б вирішити й іншу, поставлену ще стародавніми греками про закономірність розподілу простих чисел у натуральному ряді.

Про "ВСЕОХОПЛЮЮЧУ" формулу простого числа доводиться поки що лише мріяти. Та пошуки загадки закономірностей різних послідовностей, що випливають з натурального ряду чисел, тривають. І будуть тривати. Адже це наближає людство до розгадки законів природи і до розгадки таємниць чисел.

Оскільки порушене нами питання надто розлоге, ми можемо зупинитися лише на деякій ділянці подільності.

Розглядати ці питання будемо на прикладі задач. А подавати наш виклад будемо на принципі побудови математичної науки. Маємо на увазі аксіоматичний метод: закладається в основу кілька незаперечних постулатів (доведених тверджень) і з матеріалу таких "цеглинок" твориться якась частина математичної науки.

У наступних задачах ми використаємо умови подільності чисел на 2, 3, 4, 5, 9. А щодо подільності чисел на 11 чи на 7, то розглянемо лише окремі випадки. Неважко встановити, що числа, записані парною кількістю однакових цифр, діляться на 11. Аналогічно — числа, записані однаковими цифрами, якщо кількість їх кратна 3, діляться на 111 і т.д. Щоб число, записане лише одиницями, ділилося на 7, воно має містити шість одиниць, тобто — 111111. Отже, всі числа, записані одиницями, кількість яких кратна 6 (12, 18 і т.д. одиниць) діляться на 7.

І ще зауважимо, коли розв'язувати задачі цього розділу послідовно, номер за номером, то кожна попередня задача наводить на шлях до розв'язання наступної.

Пропонуємо кілька задач, що стосуються теорії подільності і деяких інших властивостей натуральних чисел.

1. Скільки одиниць має бути в числі 111...11, щоб воно ділилося на 11; 111; 1111; 11111 і т.д.?
2. Яка найменша кількість одиниць у запису числа одиницями, щоб воно ділилося на 33?
3. Яка найменша кількість одиниць у запису числа одиницями, щоб воно ділилося на 3333?
4. Яка найменша кількість одиниць у запису числа одиницями, щоб воно ділилося на 333?
5. Яка найменша кількість одиниць у запису числа одиницями, щоб воно ділилося на 259?
6. Записати одиницями число, яке ділиться на 777.
7. Яке найменше число одиниць у запису числа одиницями, щоб воно ділилося на 7777?
8. Яке найменше число одиниць має бути у запису діленого, щоб воно ділилося на 999?
9. Чи ділиться число $\underbrace{111...1}_{9 \text{ одиниць}}$ на 333 і 37?
10. Чи ділиться число $\underbrace{111...1}_{12 \text{ одиниць}}$ на 3333?

Поданими вправами ми зробили підготовку до розв'язання таких задач.

11. Довести, що $\underbrace{111...11}_{2n \text{ одиниць}} - \underbrace{222...22}_{n \text{ двійок}}$ є квадратом цілого числа.
12. Довести, що число $\underbrace{2222...22}_{2n \text{ двійок}} - \underbrace{4444...44}_{n \text{ четвірок}}$ є подвоєним квадратом цілого числа.

13. Довести, що число $\underbrace{3333...33}_{2n \text{ двійок}} - \underbrace{6666...66}_{n \text{ шестірок}}$ є подвоєним квадратом цілого числа.

14. Довести, що число $\underbrace{4444...44}_{2n \text{ четвірок}} - \underbrace{8888...88}_{n \text{ вісімок}}$ є почетвереним квадратом цілого числа.

15. Довести, що число $\underbrace{5555...55}_{2n \text{ п'ятірок}} - \underbrace{1111...110}_{n \text{ одиниць}}$ є п'ять квадратів цілого числа.

11. ЧИСЛОВІ ІГРИ

Напевно, що в переважній більшості будь-яка гра — це справа серйозна. Математичні ігри теж не виняток з цього правила, розгадати закон, за яким відбувається гра, а тим більше — з'ясувати для себе функціональні чи числові закономірності, на яких ґрунтується створення гри, це вже своєрідне "відкриття". Нехай повторне, але все-таки — відкриття.

Як відомо, гра проводиться за певним алгоритмом, і ми постараємося проникнути в теорію створення алгоритму.

Пропонуємо приклади гри з числами.

Перша гра — на відгадування суми. Гра сама по собі цікава. Та вважаємо, що цікавіше буде розповісти про весь процес "секрету" гри, а також послідовно викласти "історію" розкриття математичної суті, внаслідок якої проходить "відгадування".

Якось мій дядько, а був я тоді в четвертому класі, запропонував мені зайнятися підрахунком. За хитруватою усмішкою дядька я вловив, що буде щось подібне до гри, і радо погодився.

— Давай папір і олівець, — попросив він.

Я приніс.

— Ось тут, — показав він пальцем на папір, — напиши тризначне число. Яке собі хочеш.

Я написав 826. Дядькові сподобалося число, і він, усміхаючись, виклав такі умови:

— Під цим числом напиши ще якесь трицифрове число. Потім я напишу, а далі ти напишеш, і ще раз я напишу, додаси гарненько всі ці п'ять чисел і вийде в тебе...

Дядько взяв від мене олівець і написав трохи збоку 2824, тим самим залишаючи мені місце для дописування і додавання.

Я глянув на нього з недовірою.

— Пиши, пиши, чого дивишся? Не віриш?

Правду сказати, я не вірив.

Запис проходив так: 826 — записане число,
123 — ще раз я записав,
876 — записав дядько,
548 — знову я записав,
451 — ще раз записав дядько.

— Підкреслюй та, дивись, добре додавай.

Я хвилювався, але старався добре додавати. Дивлюся, а перша цифра суми справді 4, друга 2, третя 8, четверта 2. Точно так, як сказав дядько, — 2824.

— Не віриш? — гордо зазвучав голос дядька. — Пиши, якщо хочеш, ще.

Мене не треба було довго припрошувати. Відбувся другий сеанс гри, і знову сума п'яти доданків була названа правильно.

Десь на п'ятому прикладі я ніби опам'ятався від здивування і почав приходити до себе: це ж — закономірність, адже за кожним разом сума починалася цифрою 2 (якщо розглядати число зліва направо), а закінчувалося цифрою на два меншою від записаного мною числа, всі інші цифри всередині були без зміни. Ця моя гіпотеза підтвердилася на наступному прикладі. Та дядьків інтерес до гри вже явно згасав, а в мене ще не зникло бажання продовжувати підрахунки.

— Прошу вас — зіграймо ще раз!

— Бачиш, що за кожним разом вгадую. Та, добре, пиши.

У мене, пригадую, ніби зблиснув дух "єретизму" і з'явилося викликане ним недовір'я до магічних дядькових можливостей. І я записав число, яке закінчувалося цифрою 1. Дядькові явно не сподобався мій вчинок. Він кашлянув кілька разів і попросив, щоб я не писав числа з одиницею в кінці. Тоді я, пройнятий тим же духом єретизму, що так несподівано прокинувся, написав число з нулем у кінці. Мій родич знову не прийняв те число з ентузіазмом. Зате всі інші числа його задовольняли повністю.

Перший крок "секрету" я розгадав. А що далі? Далі, в наступних доданках, я писав однакові цифри. Дядькові це не сподобалось, тим більше, що йому теж довелося писати однакові цифри. Поступово таємниця розкривалася. Моє число, наприклад, було 111, а його 888. Моє — 333, а його — 666. Цей фокус я теж розгадав. $1 + 8 = 9$, $3 + 6 = 9$.

Зрозуміло, що дядькові неважко було написати відповідне число — доповнювати кожну цифру мого числа до 9.

Усі набуті під час гри знання я акуратно перевірив, зробив відповідне тренування і вже наступного дня в галузі тих "чарів" знав стільки ж, скільки і мій дядько.

Але в причини числової закономірності я тоді ще не зумів заглянути. Лише згодом розкрив суть гри і виявив причини залежності між доданками і сумою.

А про те, що дядько знав лише "голий" алгоритм гри, але не розумів її суті, можу доводити, виходячи з того, що він не погоджувався займатися "відгадуванням", коли я записував числа, що закінчувалися одиницею або нулем.

Та все це для мене стало зрозумілим аж тоді, коли мені вдалося "відкрити" математичну закономірність суми п'яти доданків. Сталося це, коли я був у десятому класі. Та повернемося до розкриття математичної закономірності гри. Пишучи перед трицифровим числом цифру 2, ми збільшуємо число на 2000. Але останню цифру тризначного числа було зменшено на 2. Значить, число збільшилося на $2000 - 2$, тобто на 1998, а це є два рази по 999. Ось чому дядькові доводилося двічі дописувати числа і робити так, щоб за кожним разом "його" число з "моїм" числом утворювали суму 999.

Наведемо ще один приклад з описуванням ходу міркувань. Записую число 861. В результаті підсумовування п'яти доданків буде сума 2859.

Отже,

$$
\begin{array}{rrl}
 & 861 & \\
+ & \left.\begin{array}{r}235\\764\end{array}\right\} & \text{— ці два доданки в сумі становлять 999,} \\
 & \left.\begin{array}{r}186\\813\end{array}\right\} & \text{— і ці два доданки в сумі становлять 999,} \\
\hline
 & 2859 & \text{— передбачувана сума.}
\end{array}
$$

Усе, як бачимо, закономірно і ніякої загадковості тут немає. Більше того, зрозумівши числову залежність, можна створити цілий ряд аналогічних "ігор".

Подамо кілька інших варіантів гри.

1. Можна запропонувати записати перше число чотирицифрове або п'ятицифрове. А все інше відбувається за

правилом (алгоритмом), описаним вище. (Кожну цифру третього і п'ятого доданків пишемо так, щоб вона була доповненням відповідної цифри попереднього доданка до 9.) Якщо записано число 6387, то, відгадуючи суму, збільшуємо його на 20000 – 2 і в результаті буде 26385.

2. Можна створити гру лише для трьох доданків. Якщо записати, наприклад, трицифрове число 264, то в результаті буде 1263.

$$\begin{array}{rl}
264 & \text{— записали число,} \\
+\quad 111 & \text{— ще раз записали,} \\
\underline{888} & \text{— ми записуємо (доповнюючи відповідно до 9),} \\
1263 & \text{— передбачувана сума.}
\end{array}$$

3. Неважко створити алгоритм гри для семи трицифрових доданків. Тоді доведеться зменшувати останню цифру на 3, і цю трійку ставити перед записаним числом. Отже, якщо було трицифрове число, то ми його збільшуємо на 3000 – 3 = 2997. А це є 999 + 999 + 999.

Учасник гри записав число 624. Результат гри — 3621.

Отже:

$$\begin{array}{rl}
 & 624 \ \text{— записане число,} \\
999 & \left\{\begin{array}{l} 125 \ \text{— ще раз записав,} \\ 874 \ \text{— ми записали,} \end{array}\right. \\
999 & \left\{\begin{array}{l} 261 \ \text{— він записав,} \\ 738 \ \text{— ми записали,} \end{array}\right. \\
999 & \left\{\begin{array}{l} 666 \ \text{— він записав,} \\ \underline{333} \ \text{— ми записали.} \end{array}\right. \\
 & 3621 \ \text{— передбачувана сума.}
\end{array}$$

4. А ще можна придумати простішу гру.

— Запиши трицифрове число, — кажемо.

— 634, — записав учасник гри.

— Підпиши під ним ще якесь трицифрове число, і ще я допишу число, виконаємо додавання — і в сумі буде 1634.

Міркування такі. Записуючи третій доданок, доповнюємо цифри другого доданка так, щоб другий доданок з третім дав у сумі 1000. Отже, потрібно першу справа цифру доповнити до 10, а всі інші — до 9. А записавши 1 перед 634, ми збільшили його на 1000.

$$\begin{array}{r}
634 \\
+\ 236 \\
\underline{764} \\
1634
\end{array}$$

Зрозуміло, що можна "відгадувати" суму, записуючи перед першим доданком цифру 2, 3 і т.д. Тим самим збільшуємо число на 2000, 3000 і т.д. А вже потім потрібно повторити відповідні доповнення.

З описаних прикладів гри можна зробити деякі висновки, а саме: лише після глибокого розуміння суті математичної закономірності можна провести ряд аналогій і скласти чимало подібних задач.

Пропонуємо ще кілька ігр.

Умова першої гри така. Запишіть трицифрове число (може бути й більше цифр), переставте в цьому числі цифри і від більшого відніміть менше. В різниці викресліть одну цифру і назвіть суму цифр, що залишилися, і тоді я скажу, яка цифра викреслена.

Розгадка числового фокуса полягає ось у якій закономірності. Під час ділення числа a на 9 дістанемо остачу c, (де $1 \leq c < 9$). Нехай b — число, записане тими самими цифрами, що й a. Тому число b при діленні на 9 дасть остачу c.

Отже, $a = 9x + c$, $b = 9y + c$. Або $(a - b) \vdots 9$.

Зрозуміло, що сума цифр числа $a - b$ кратна 9. Якщо нам повідомлена сума цифр, що залишилися після викреслення однієї цифри, то ми можемо легко відгадати викреслену цифру. Вона доповнює суму повідомлених нам цифр до найближчого числа, кратного 9. Але коли повідомили нам суму цифр (що залишилися), кратну 9, то відповідь неоднозначна: закреслена цифра 0 або 9.

П р и к л а д. Нехай число 398, а число з переставленими цифрами 983.

$$\begin{array}{r} _{-}\,983 \\ 398 \\ \hline 585. \end{array}$$

Якщо нам повідомили, що сума цифр, які залишилися, дорівнює 10, то викреслена цифра 8.

Умова другої задачі така.

Запишіть будь-яке трицифрове число. Допишіть до нього справа те саме число. Це шестизначне число поділіть на 7, а одержану частку поділіть на 11, нову частку поділіть на 13.

— Яке число маємо після останнього ділення?

— Вийшло трицифрове число a, — почуємо.

— Вами й було записане число a.

Розгадка фокуса полягає в тому, що дописавши до трицифрового числа це саме число, його таким чином помножено на 1001. А $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Отже, воно ділиться на 7, 11 і 13.

Приклад. Було записано число 386. Дописавши до цього числа справа те саме число, дістанемо $386\,386 = 386\,000 + 386 = 386 \cdot (1000 + 1) = 386 \cdot 1001$. Тепер зрозуміло, що 386 386 ділиться на 7, на 11 і на 13.

Ми подали приклади ігор з математичним обґрунтуванням їх закономірностей. Отже, зроблено крок від забавки до знань.

12. ВСЯКА ВСЯЧИНА

З банку логічного мислення

Не викликає заперечень, що поняття логічного і математичного мислення ототожнюються. Чи не найважливішою функцією такого мислення є правильне розв'язування задач. А задачі можуть бути чисто математичні або дослідженням життєвих ситуацій.

Отже, пропонуємо таку задачу.

В одній країні по сусідству розташовані два знамениті міста: Правдинськ і Брехнієво. Жителі першого міста завжди кажуть правду, і тільки правду. Мешканці другого міста кажуть неправду, і тільки неправду. Та, як не дивно, між жителями тих міст установилися приятельські стосунки, вони відвідують одні одних, і на вулицях кожного з міст можна зустріти і тих, і тих. В одне із цих міст закидають розвідника. Він знає назви міст та властивості їх мешканців, але не знає, в якому місті знаходиться сам. Щоб встановити своє місцезнаходження, розвідник може випадковому зустрічному ставити лише одне запитання. Яке це запитання?

Задача адресується усім тим, хто шанує логічне мислення. Розв'язання не менш цікаве, ніж сама задача.

Суть розв'язку полягає в тому, що розвідникові доводиться аналізувати відповідь мешканців міст Правдинська чи Брехнієва.

Цікавим у задачі (точніше — в розв'язку) є те, що мешканці міст навіть не здогадуються, що їхня відповідь дає повну інформацію розвідникові.

Оскільки тут лише одна задача, відповідь подаємо відразу, не виносячи в окремий розділ.

Отже, в якому б місті не опинився розвідник, він будь-якому зустрічному поставить запитання:

— Ви мешканець цього міста?

Якщо почує відповідь: “Так, я мешкаю в цьому місті”, — робить висновок, що знаходиться в Правдинську. І справді, якщо розвідник натрапив під час зустрічі на “правдивого”, то почує правдиву відповідь “так”. Якщо ж натрапив на “брехуна”, то теж почує відповідь “так” (звичайно, брехун скаже не те).

Якщо від зустрічного почує відповідь: “Ні, я не мешканець цього міста”, то приходить до висновку, що він у Брехнієві. І, справді, зустрінутий “правдивий” засвідчить правду відповіддю — “ні”, а “брехун” відповіддю — “ні” (збреше).

Отже, ствердна відповідь “так” (від кого не була б почута) однозначно вказує на місто Правдинськ. Відповідь заперечна “ні” однозначно вказує на місто Брехнієво.

Число і зубчате колесо

А таки треба було багато спостерегти в світі та передумати, щоб побачити і відчути, що “усе впорядковується відповідно до чисел”. Так сказав Піфагор. Порівняння не лише предметів, а й явищ природи і стосунків між людьми вдається відобразити за допомогою математики.

Взаємодія деталей машин відображається числовим співвідношенням. Подаємо яскравий приклад цього.

Основною частиною багатьох механізмів і лічильних пристроїв є система зубчатих коліс. Цілком зрозуміло, що співвідношення обертів з'єднаних між собою зубчатих коліс залежить від числа зубців на кожному з них. Те з них, яке, наприклад, має вдвічі менше зубців, ніж друге, зробить обертів, відповідно, у два рази більше, а якщо має в три рази менше зубців, то і втричі більше зробить обертів і т.д.

У техніці часто доводиться робити пристрій, який би періодично фіксував певне число обертів вала чи ведучого колеса, переводив це число в одиниці шляху, електроенергії, часу і тому подібне і фіксував би на табло.

Виявляється, що в окремих випадках можна створити такі лічильники, в яких лише двоє зубчатих коліс.

Наводимо математичне обґрунтування підрахунку обертів шестерень таких лічильних пристроїв.

Довжину ободів зубчатих коліс, що взаємодіють, правомірно вимірювати кількістю зубців на кожному з них, адже всі зубці конґруентні між собою. Це значно спростить викладки.

Нехай одне з коліс має n зубців а друге — m. Пронумеруємо їх на кожному колесі: 1-й, 2-й, 3-й, ... , n-й і, відповідно, 1-й, 2-й, 3-й, ... , m-й. Поставимо їх у зачеплення: 1-й з 1-м, 2-й з 2-м і т.д. і змусимо обертатися. Очевидно, що обидва колеса одночасно зроблять по цілому числу обертів і перші зубці зустрінуться знову на відстані (тобто через число зубців), що дорівнює НСК чисел n і m. Отже, НСК(n; m) — це найменший період, через який повторюватиметься зустріч відповідних зубців.

Якщо числа n і m взаємно прості, то перша шестірня зробить до вказаного моменту $\frac{nm}{n} = m$ обертів, а друга — $\frac{nm}{m} = n$ обертів. Якщо n і m не взаємно прості, то перша зробить $\frac{\text{НСК}\,(n;\,m)}{n}$, а друга відповідно $\frac{\text{НСК}\,(n;\,m)}{m}$ обертів.

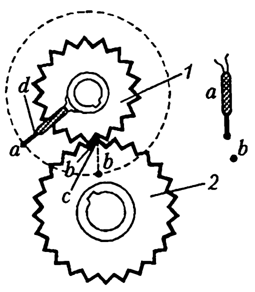
Залежно від призначення лічильного пристрою треба зробити розрахунок співвідношення зубців на взаємодіючих шестірнях.

Нехай, наприклад, треба, щоб за кожні п'ятдесят обертів великого вала подавався сигнал.

На ведучому і веденому валах встановимо шестірні. Причому шестірня, установлена на ведучому валі, повинна мати 50 зубців. Число зубців веденої шестірні повинно бути взаємно простим із 50. При взаємно простих числах зубців ведений вал зробить стільки обертів до сигналу, скільки зубців на ведучому валу, і, навпаки, ведучий — зробить стільки обертів, скільки зубців на веденому валу.

Далі лишається зробити пристрої на дисках взаємодіючих шестерень. Ця взаємодія і передається в сигнальну систему.

Наведемо ще приклад з ілюстрацією на малюнку:



шестірня *1* — ведуча, має 18 зубців; шестірня *2* — ведена, має 25 зубців; *a* — електричний або механічний сигнальний пристрій; *b* — механізм для спрацювання сигнального пристрою.

Якщо в початковому положенні зубець *d* співпадає із западиною *c*, то наступне співпадання настане тоді, коли шестірня *1* зробить 25 обертів (або те саме, коли шестірня *2* зробить 18 обертів). У цьому разі спрацьовує сигналізація. Аналогічні розрахунки можна робити і для ланцюгової передачі.

На цьому принципі будуються лічильники для підрахунку кількості деталей, що надходять з конвейєра.

1. Колеса воза (переднє і заднє) мають ободи: а) 22 дм і 27 дм; б) 20 дм і 30 дм. На якій найменшій відстані кожне колесо зробить ціле число обертів?

Відповідь. а) 594 дм; б) 60 дм.

2. Зубчаті колеса з'єднані послідовно: 1-ше з 2-им, 2-ге з 3-ім і т.д., а останнє — з першим. Чи може бути така система в русі? Чи залежить рух системи від числа зубців на кожному колесі?

Відповідь. Два зубчаті колеса, що перебувають у зачепленні, обертаються у протилежних напрямках. Отже, якщо останнє колесо обертатиметься в протилежному напрямку відносно першого (ведучого), то система буде в русі. А це можливе при парній кількості шестерень.

Число зубців на шестірнях впливатиме на співвідношення обертів кожної з них.

3. Чи впливає числове співвідношення зубців на з'єднаних шестірнях на рівномірність їх зношування?

Відповідь. Впливає. При взаємно простих числах відповідні зубці обох шестерень зустрічаються рідше. Перед кожною наступною взаємодією кожен зубець однієї шестірні зустрічається з усіма іншими другої. Отже, шестірні зношуються рівномірно.

При взаємно складених числах цього не буде. Є зубці, які ніколи не взаємодіють між собою. Тому період зустрічі взаємодіючих зубців зменшується. А оскільки зубці можуть дещо відрізнятися формою чи властивостями, то і зношуватися вони будуть по-різному.

Побудова кутів

Звертаємо увагу, що ми будемо розглядати кути, які мають ціле число градусів. Над кутами будемо проводити такі операції: 1) додавання; 2) від більшого кута віднімати менший; 3) множити кут на ціле число; 4) ділити кут на число 2^n (n — натуральне число) за умови, що частка має ціле число градусів.

Побудови будемо виконувати за допомогою циркуля і лінійки, але, як побачимо, для нас важливіше не безпосередня побудова, а словесний її опис. Бо й справді, за допомогою наших креслярських інструментів не так просто поділити, наприклад, $2°$ навпіл, щоб дістати кут $1°$. Крім того, зауважимо, що за допомогою лінійки і циркуля вміємо будувати кути $90°$, $45°$ $(90° : 2)$, $60°$ (а отже, й $30°$ і $15°$) тощо.

1. Дано кут $47°$. Які кути можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки?

Розв'язування проведемо двома способами:

1) $47° + 47° = 94°$; $94° - 90° = 4°$.

Кут $4°$ можна поділити на 4 (на 2, потім ще на 2) і дістати кут $1°$. Тепер можна побудувати будь-який кут з цілим числом градусів;

2) $47° - 45° = 2°$; $2° : 2 = 1°$.

2. Дано кут $11°$. Побудувати кут $3°$.

Розв'язання. $11° \cdot 3 = 33°$, $33° - 30° = 3°$.

Задача розв'язана, але поставимо до задачі додаткове запитання. Які ще кути можна побудувати?

$3° \cdot 4 = 12°$, $12° - 11° = 1°$.

Отже, можна побудувати кути з довільним цілим числом градусів.

3. Дано кут $13°$. Які інші кути можна побудувати?

$13° \cdot 7 = 91°$, $91° - 90° = 1°$.

Тепер можна побудувати будь-який кут з цілим числом градусів.

4. Дано кут $3°$. Які кути можна побудувати?

Виявляється, що в цьому разі можна побудувати лише кути, кратні 3. Інших кутів не вдасться побудувати, бо $3°$ не можна поділити на 3 рівні частини, не можна одержати кут $1°$.

5. Якщо дано кут $5°$, то можна побудувати лише кути, кратні 5.

Доведемо ці положення.

Очевидно, маючи кут $3°$, можна побудувати кути $3°n$ і $3°k$, а отже, і кути $3°n \pm 3°k$ (де n, k — натуральні числа, $n > k$). Але $15°$, $30°$, $45°$, $60°$ і т.д. (маються на увазі кути, кратні перерахованим) можна подати як добуток $3°$ на натуральне число. А кути $3°n \pm 3°k$ теж кратні 3.

Аналогічне доведення і для кутів $5°$.

Отже, виникає ідея, якщо значення заданого кута (кути з цілим числом градусів) не кратне 3 і 5, то можна побудувати будь-який інший кут. Доведемо це.

Доведення здійснюємо методом перевірки.

Нехай дано кут α. Очевидно, α можна подати як $15°n + \beta$ (де $\beta < 15°$), якщо $\alpha > 15°$. Якщо α не кратне 3 і 5, то й β не кратне 3 і 5. (За властивістю ділення суми, адже $15°n$ кратне 3 і 5).

Отже, треба перевірити лише кути від 1° до 15°, які не кратні 3 і 5, тобто кути: 1°, 2°, 4°, 7°, 8°, 11°, 13°, 14°. За кутом 1° можна побудувати будь-який кут; 2°, 4°, 8° можна звести до 1°, ділячи їх послідовно на 2. Лишається перевірити лише кути 7°, 11°, 13°, 14°.

1) $7° \cdot 2 = 14°$, $15° - 14° = 1°$;

2) $15° - 11° = 4°$, $4° : 4 = 1°$;

3) $15° - 13° = 2°$, $2° : 2 = 1°$;

4) $15° - 14° = 1°$.

Що і треба було довести.

З а у в а ж е н н я. Інколи вигідніше допоміжним кутом брати не 15°, а $15°n$ (n — натуральне число). Наприклад, якщо дано кут 37°, то $37° - 30° = 7°$, $7° \cdot 5 = 35°$, $35° - 30° = 5°$, $7° - 5° = 2°$, $2° : 2 = 1°$.

Задача може бути дещо ускладнена. Наприклад, заданий кут в 91° поділити на 7 рівних частин.

Розв'язання. $91° : 7 = 13°$. Отже, задача зводиться до побудови кута 13° за кутом 91°. $91° - 90° = 1°$, $1 \cdot 13° = 13°$. Кут в 13° побудовано, а цей кут вміщається 7 раз у 91°.

Таким чином, якщо є кут, число градусів якого не кратне 3 і 5, то можна побудувати будь-який кут з цілим числом градусів.

Другий тип задач про поділ кута зрозумілий із щойно викладеного. Наприклад, поділити кут у 187° на 17 або на 11 рівних частин.

Зауважимо, що $187 : 17 = 11$, $187 : 11 = 17$.

Маючи кут 187°, побудуємо кут в 1°: $187° - 180° = 7°$, $7° \cdot 13 = 91°$, $91° - 90° = 1°$. Тепер можна будувати кути 17° і 11°.

На закінчення слід підкреслити, що коли одночасно є кути 3° і 5°, то можна побудувати будь-який кут з цілим числом градусів. Доведемо це:

$5° - 3° = 2°$, $2° : 2 = 1°$, а отже, можна побудувати будь-який кут з цілим числом градусів.

Звернемо увагу ще й на те, що коли дано одночасно два кути, число градусів одного з яких кратне лише 3, а число градусів другого кратне лише 5, то теж можна побудувати будь-який кут.

За інших умов побудувати будь-який кут не можна.

Користуючись циркулем і лінійкою, ми виконували над кутами такі операції: додавання кутів; від більшого кута віднімали менший кут; кут множили на натуральне число; ділили кут на 2^n (де n — натуральне число). Трисекцію кута (тобто поділ кута на 3 рівні частини за допомогою циркуля і лінійки) нам не доводилося здійснювати.

1. Кут 44° поділити на 11 рівних частин.
2. Кут 77° поділити на 7 рівних частин.
3. Побудувати кут 49°, якщо дано кут 13°.
4. Які кути можна побудувати, маючи кут 17°?
5. Які кути можна побудувати, якщо дано кут 24°?
6. Які кути можна побудувати за кутом 25°?
7. Які кути можна побудувати за кутом 45°?
8. Кут 36° поділити на 6 рівних частин.
9. На скільки рівних частин можна розділити кут 54°?
10. Кут 69° поділити на 3 рівні частини, якщо дано кут 5°.
11. Дано кути 21° і 35°. Побудувати будь-який кут з цілим числом градусів.

Софізми в математиці

Софізм (грецьке слово *sophisma*) — навмисно хибний умовивід, побудований на неправильних положеннях. Отже, застосовуючи хибні положення для доведення тверджень чи під час полеміки, ми входимо у поле софістики. І у такий спосіб можна "довести" все що завгодно, чи все, що нам хочеться. І якщо не дотримуватись математичної строгості в міркуваннях, можна дійти до парадоксальних висновків. Наприклад, $2 \cdot 2 = 5$, чи $2 \cdot 2$ дорівнює будь-якому іншому числу. Неважко зробити висновок, що таким "способом" можна "довести", що $3 = 4$, $5 = 7$ чи ще щось подібне.

Скажемо відразу, "доведення" чи, точніше сказати, відстоювання неправильних тверджень побудоване на тому, що в процесі доведення чи полеміки вставляємо "непомітно" неправильний умовивід. У математиці — це ділення на вираз, що дорівнює нулю, або — добування квадратного кореня із виразу, що набуває від'ємного значення.

Прийнято вважати неможливим ділення на нуль. Справді, нехай $a : 0 = b$. Тоді $0 \cdot b$ завжди дорівнює нулю, і значення b не визначене, а тому кажемо, що на нуль ділити не можна. Отже, при діленні на нуль ми потрапляємо у світ невизначеності, яку довільно ідентифікують як безмежність (позначають символом ∞). А потім ще й розрізняють "плюс" чи "мінус" безмежність. Хоча на таке розрізнення немає доказів, хоч немає і заборони. Тож для нас — немов потойбічний світ. І ділення на нуль — явище зовсім іншої категорії, аніж інші допущені недоречності. Розглянемо такий приклад. "Довести", що $4 = 5$.

Розглянемо рівність $4 : 4 = 5 : 5$. (Це правильна рівність, оскільки $1 = 1$.) Винісши у лівій частині за дужки 4, а в правій 5, матимемо: $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$, або $4 \cdot 1 = 5 \cdot 1$, звідки $4 = 5$. Це не так софізм, як явне порушення математичного закону. Бо в даному випадку частку аж ніяк не можна розглядати як суму чи різницю. Адже $4 : 4 \neq 4(1 : 1)$, чи $5 : 5 \neq 5(1 : 1)$, і явні помилки теж не можна розглядати як невизначеність.

Ще приклад. Довести, що $7 = 3$.

Розглянемо очевидну рівність: $49 - 28 - 21 = 21 - 12 - 9$. Винісши за дужки 7 і 3, дістанемо: $7(7 - 4 - 3) = 3(7 - 4 - 3)$. Звідси $7 = 3$.

Прикладів доведення помилкової рівності можна навести скільки завгодно. У цьому прикладі ми застосували ділення правої і лівої частин рівняння (в такій розмові правомірніше вживати слово "рівність") на нуль і таким чином сягнули в невизначеність, де, як бачимо, "здійснюються" парадоксальні явища.

Так сказав Піфагор (син Мнесарха із Самосу)

Нічому не дивуватися.

Тимчасова невдача краще тимчасової удачі.

Не давай дурневі в руки меч, а нечесному — владу.

Твори велике, не обіцяючи великого.

Жарти, як і сіль, належить вживати помірковано.

Для пізнання натури будь-якого народу намагайся найперше вивчити його мову.

Будь другом істини і мучеництва, та не будь її захисником до нетерпимості.

Живи з людьми так, щоб твої друзі не стали недругами, а недруги стали друзями.

Келих життя був би солодким до нудоти, якщо б не падало в нього гірких сліз.

Не заплющуй очей, коли хочеш спати, не проаналізувавши всіх своїх учинків за минулий день.

Не роби нічого ганебного ні в присутності інших, ні таємно. Першим твоїм законом має бути повага до себе самого.

У хвальків, як і в позолоченій зброї, внутрішнє не відповідає зовнішньому.

Лише неблагородна людина здатна в очі хвалити, а поза очі злословити.

Лестощі, немов зброя, намальована на картині: викликає приємність, а користі — ніякої.

У час гніву не треба ні говорити, ні діяти.

Ніхто не має втрачати міру ні в їжі, ні в питті.

Усе впорядковується відповідно до чисел.

Наводимо дещо із математичних тверджень, зроблених Піфагором.

Є свідчення, що Піфагору належить геометричний спосіб доведення деяких закономірностей натуральних чисел. Для прикладу наводимо твердження, що суми послідовних непарних чисел, починаючи з одиниці, є точними квадратами, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$ і т.д.

Подаємо алгебраїчне доведення цього твердження.

Послідовність непарних натуральних чисел є арифметична прогресія, сума якої

$$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = \frac{1 + (2n - 1)}{2}\, n = n^2.$$

Ще наведемо твердження Піфагора, що всяке непарне число є різницею квадратів: ($3 = 2^2 - 1^2$, $7 = 4^2 - 3^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, $9 = 5^2 - 4^2$, $13 = 7^2 - 6^2$, $15 = 8^2 - 7^2$ і т.д.).

Подамо алгебраїчне доведення цього твердження. Будь-яке непарне число записується у вигляді $2n - 1$. Додамо і віднімемо від нього n^2 і зробимо перетворення:

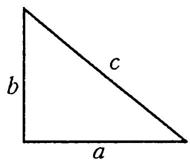
$$2n - 1 = n^2 - n^2 + 2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2.$$

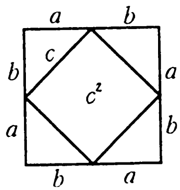
Заслуговує на увагу знаменита теорема Піфагора. Класичне її формулювання таке.

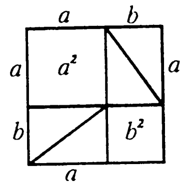
Якщо сторони прямокутного трикутника є сторонами квадратів, то площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах.

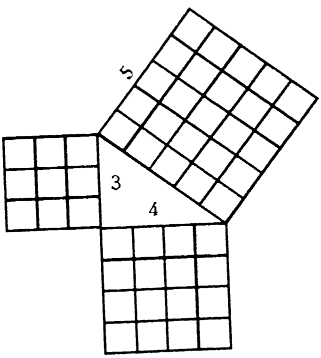
Із багатьох різних способів доведення цієї теореми подаємо геометричне її доведення.

Нехай у прямокутному трикутнику катети дорівнюють a і b, а гіпотенуза c. Побудуємо два квадрати, сторони яких дорівнюють $a + b$.









Очевидно, що площі цих квадратів рівні. У першому квадраті виділимо квадрат, побудований на гіпотенузі (дістанемо квадрат і чотири рівні прямокутні трикутники).

У другому квадраті виділимо квадрати, побудовані на катетах (дістанемо два квадрати і чотири рівні прямокутні трикутники). Тепер неважко бачити, що площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах цього трикутника.

Для прикладу на малюнку зображено прямокутний трикутник із сторонами 3, 4, 5.

ВІДПОВІДІ

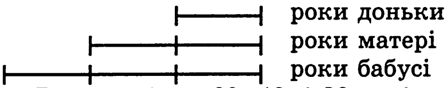
До стор. 5—7

1. Число років доньки зобразимо кружечком О, то число років матері відповідає двом кружечкам ОО, а число років бабусі — трьом кружечкам ООО.

Отже, шістьом кружечкам відповідає 120 років. Схематично модель задачі така: О + ОО + ООО = 120

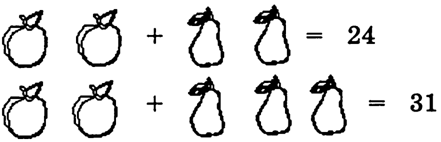
Зрозуміло, що на один кружечок припадає 20 років. Отже, доньці 20 років, матері 40 років, бабусі 60 років.

Моделювати задачу можна і відрізками:



Відповідь. 60, 40, і 20 років.

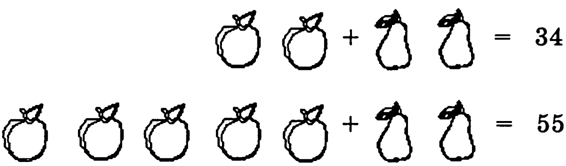
2. За умовою задачі зробимо малюнок:



З малюнка-рівняння видно (віднявши від другого рівняння перше), що одна груша коштує 7 к. А, отже, яблуко коштує 5 к.

Відповідь. 5 к., 7 к.

3. Умову задачі зобразимо малюнком:



і бачимо, що три яблука коштують 21 к.

Відповідь. 7 к., 10 к.

4. 8 к., 10 к.

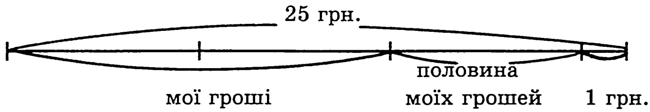
5. 5 к., 8 к.

Вказівка. Спочатку треба встановити, що груша на 3 к. дорожча від яблука.

6. 6 к., 8 к.

Вказівка. У першому випадку 6 яблук і 9 груш коштуватиме 108 к., а в другому — 6 яблук і 4 груші коштуватимуть 68 к.

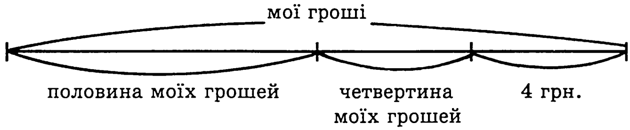
7.



$25 - 1 = 24$; $24 : 3 = 8$ (половина моїх грошей).

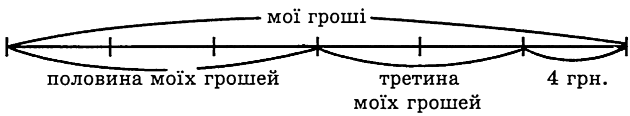
В і д п о в і д ь. 16 грн.

8. Розв'язок задачі видно з малюнка:



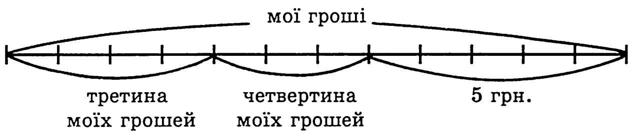
В і д п о в і д ь. 16 грн.

9. Усі гроші зобразимо відрізком. Відрізок поділимо на 6 рівних частин, щоб можна було показати половину і третину цього відрізка.



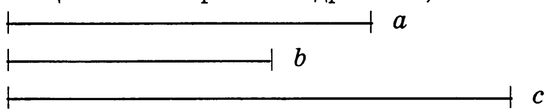
В і д п о в і д ь. 24 грн.

10. Усі гроші зобразимо відрізком. Відрізок поділимо на 12 рівних частин, щоб можна було показати третину і четвертину грошей.



В і д п о в і д ь. 12 грн.

11. Якщо числа зобразити відрізками, то їх легко порівняти.



Видно, що число c найбільше, а число b найменше.

12. 65; 13.

13. 96; 24.

14. 57; 19.

15. 952; 136.

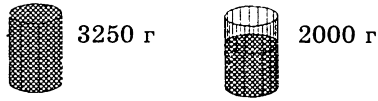
Вказівка. Перша цифра множеного (меншого трицифрового числа) 1, бо інакше при множенні на 7 в добутку дістанемо чотирицифрове число. Перша цифра добутку має бути 9. Множене повинно закінчуватися цифрою 6, щоб добуток закінчувався цифрою 2.

16. Може, якщо лютий у високосному році починається з понеділка.

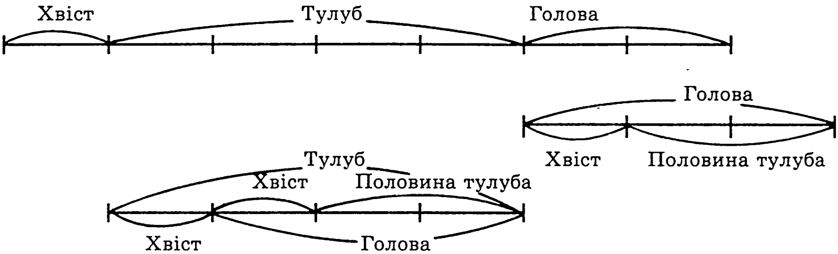
17. Може, якщо місяць має 31 день і починається з неділі.

18. Може, якщо місяць має 31 день і починається з вівторка.

19. З малюнка видно, що половина води важить 1250 г. Отже, вся вода важить 2500 г, а посудина — 750 г.

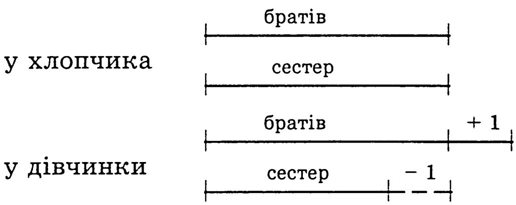


20.



Отже, половина тулуба важить 2 кг (два хвости), голова — 3 кг, а вся рибина — 8 кг.

21. I. Найперше робимо висновок, що у сім'ї хлопчиків більше, ніж дівчаток. У хлопчика братів і сестер однаково (відрізки рівні). У дівчинки братів на 1 більше, а сестер на 1 менше, ніж у хлопчика. Тому в дівчинки 2 сестри.



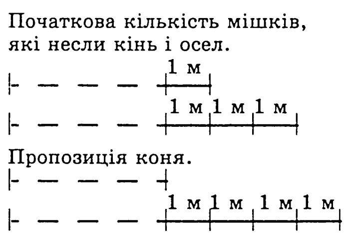
Отже, хлопчиків 4, дівчаток 3, в сім'ї 7 дітей.

II. Задачу можна розв'язати через систему рівнянь. Нехай x — хлопчики, y — дівчатка. Тоді

$$\begin{cases} x - 1 = y, \\ y - 1 = \dfrac{x}{2}; \end{cases} \quad y = 3, \quad x = 4.$$

22. I. Із відповіді осла видно, що він ніс на своїй спині на два мішки більше, ніж кінь.

З малюнка видно, що коли б кінь віддав один мішок, то в нього лишилося б 4 мішки. Отже, спочатку в коня було 5 мішків, а в осла 7.



II. Нехай у коня було x мішків, а в осла — y мішків.

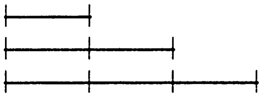
"Слухаючи" розмову між конем і ослом, складаємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2(x-1) = y+1, \\ x+1 = y-1; \end{cases}$$

Звідси $x = 5$, $y = 7$.

Відповідь. Кінь ніс 5 мішків, а осел 7 мішків.

23. Умову задачі зобразимо малюнком. Кількість яблук у першому ящику: 460 : 6 = 75 (яблук)



I ящик — 75 яблук

II ящик — $2 \cdot 75 = 150$ яблук

III ящик — $3 \cdot 75 = 225$ яблук

24. 987; 102.

25. 98765; 10234.

26.

кури	індики	качки	гуси	всього
3	3	2	1	9
3	3	2	0	8
3	3	1	0	7

Враховуємо також і відсутність гусей.

27.

кури	індики	качки	гуси	всього
4	4	3	2	13
4	4	3	1	12
4	4	2	1	11
4	4	1	0	9

28. 365 днів.

29. Так. Високосний рік.

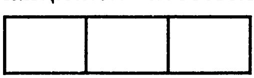
30. Ні, бо такий рік повинен мати 367 днів.

31. 302 мм.

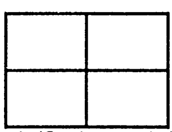
Вказівка. Кожне наступне кільце, починаючи з другого, збільшує довжину ланцюжка на 3 мм. Отже, $99 \cdot 3 + 5 = 302$ мм.

32. Такий ланцюжок виготовити не можна.

33.



Площа дорівнює
3 квадратикам



Площа дорівнює
4 квадратикам

Периметри обох фігур однакові (8 сірників).

34. Зрозуміло, що найменше число є $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

35.

I плита			II плита		III плита			
x	18	+	x	+	x	15	=	156

$$3\ \boxed{\ x\ } = 123$$

Отже, 123 : 3 = 41 (кг). Це і є маса другої плити.
Відповідь. 59 кг, 41 кг, 56 кг.

До стор. 7—12

Щоб задані базові числа краще запам'ятовувалися, виділимо їх ***жирним курсивом***.

1. Суть розв'язання полягає в тому, щоб зуміти побачити, що $a + \boldsymbol{7} = \boldsymbol{5} + \boldsymbol{6}$, звідки $a = 4$. Потім бачимо, що $4 + b = \boldsymbol{5} + \boldsymbol{7}$, звідки $b = 8$. А далі таблиця заповнюється просто, оскільки вже відома сума стовпця $8 + 7 + 6 = 21$.

a=4	b=8	9
12	***7***	2
5	***6***	10

Аналогічно розв'язуємо наступні вправи.

2.
1) $a + \boldsymbol{7} = \boldsymbol{5} + \boldsymbol{6}$, звідси $a = 4$;
2) $b + 4 = \boldsymbol{5} + \boldsymbol{7}$, звідси $b = 8$.

b=8	a=4	9
8	***7***	6
5	10	***6***

3.
1) $a + \boldsymbol{7} = \boldsymbol{5} + \boldsymbol{6}$, звідси $a = 4$;
2) $\boldsymbol{5} + b = 4 + \boldsymbol{6}$, звідси $b = 5$.

a=4	***7***	7
9	***6***	3
5	b=5	8

4

7	6	2
0	***5***	10
8	***4***	***3***

5

4	***3***	***5***
5	***4***	3
3	5	4

6

6	6	***3***
2	***5***	8
7	4	***4***

7

8	1	6
3	***5***	7
4	***9***	2

При такому заданні базових чисел утворилося відоме заповнення квадрата першими дев'ятьма натуральними числами (квадрат 7).

8. Подаємо один із способів заповнення.
1) $a + \boldsymbol{7} = \boldsymbol{5} + \boldsymbol{6}$, звідси $a = 4$;
2) $b + \boldsymbol{7} = \boldsymbol{5} + 4$, звідси $b = 2$;
3) $c + 4 = \boldsymbol{5} + 2$, звідси $c = 3$;
4) $x + y = \boldsymbol{5} + \boldsymbol{6}$, $y = 11 - x$;
5) $2 + y + 7 = 3 + 4 + x$.
Отже $x = 6{,}5$.

x= =6,5	c=3	a=4
b=2	y=11– –x= =4,5	***7***
5	***6***	2,5

9. Легко бачити, що $a + \mathit{7} = \mathit{5} + \mathit{6}$, звідси $a = 4$. Тепер, позначивши клітинки x, y, z, дістаємо:
1) $x + (4 + 6) = y + (\mathit{6} + \mathit{7})$, звідси $y = x - 3$.
2) $z + (4 + \mathit{5}) = x + (4 + \mathit{6})$, звідси $z = x + 1$.
3) $z + y = (x - 3) + (x + 1) = 2x - 2$, $2x - 2 = \mathit{5} + \mathit{6}$, звідси $x = 6{,}5$.

$a = 4$	$x=6{,}5$	*6*
$z=x+1$ $=7{,}5$	5,5	$y=x-3$ $=3{,}5$
5	4,5	*7*

10. За розміщенням базових чисел ця задача аналогічна до попередньої, проте застосуємо інший спосіб заповнення. Спочатку знаходимо $a = 8$ із рівності $a + \mathit{8} = \mathit{6} + \mathit{10}$. Враховуючи, що по діагоналі числа утворюють арифметичну прогресію, ставимо в центрі 8 (і заповнюємо далі).

$a=8$	6	*10*
10	8	6
6	10	*8*

11

15	1	17
13	11	*9*
5	21	*7*

12

4	3	*5*
5	4	3
3	5	*4*

13

7	4,5	*5*
3,5	5,5	7,5
6	6,5	*4*

14

8	10,5	*7*
7,5	8,5	9,5
10	6,5	*9*

15. Позначивши число в одній із клітинок через x і знаючи суму $(3 + 4 + 5)$, заповнюємо усі клітинки квадрата. Потім складаємо рівняння (в рядку, стовпці чи діагоналі) і знаходимо x ($x = 5$).

15

x	$7-x$	*5*
$14-2x$	$9-x$	*4*
$x-2$	$11-x$	*3*

16

x	$16-x$	*8*
$25-2x$	$2x-10$	*9*
$x-1$	$18-x$	*7*

З рівняння $(x - 1) + (2x - 10) + 8 = 24$ знаходимо $x = 9$.

17

9	6	*9*
8	8	*8*
7	10	*7*

18

x	*9*	$15-x$
$23-2x$	*8*	$2x-7$
$x+1$	*7*	$16-x$

x — будь-яке (безліч заповнень).

19

x	*9*	$15-x$
$22-2x$	*7*	$2x-5$
$2+x$	*8*	$14-x$

x — не існує, бо $x + \mathit{7} + 14 - x \neq 24$.

20. Як бачимо, квадрати 20, 21 мають безліч заповнень, бо всі складені рівняння не містять змінної x. Отже, змінній x можна надавати будь-якого значення.

20

$14-x$	$x-5$	*12*
$5+x$	*7*	$9-x$
2	$19-x$	x

21

$1+x$	$10-x$	*7*
$12-x$	*6*	x
5	$2+x$	$11-x$

22

x	$8-x$	*7*
$12-x$	*5*	$x-2$
3	$x+2$	$10-x$

23

x	$8-x$	*7*
$10-x$	*3*	$x-4$
5	$x-2$	$12-x$

22. x — будь-яке.

23. x — не існує, бо $(8 - x) + 3 + (x - 2) \neq 15$.

24

16	*7*	*10*
5	*11*	17
12	15	6

25

6	9	*9*
11	*8*	5
7	7	*10*

26

10	6	11
10	*9*	8
7	12	*8*

27

13	*8*	9
6	*10*	14
11	12	7

28

11	7	*12*
11	10	9
8	13	*9*

29

8	7,5	*10*
10,5	8,5	6,5
7	9,5	*9*

30. Безліч заповнень.

31. Розв'язку не існує.

32. Розв'язку не існує.

33. Розв'язку не існує, бо $5 + x \neq x + 2 + 9$.

34. Безліч заповнень.

35. Безліч заповнень.

33

x	*7*	
	$x+2$	*9*
5		

34

$x+2$	*5*	
	x	*9*
7		$x-2$

35

x	*9*	
	$x+2$	*5*
7		$x+4$

36

15	1	11
5	*9*	13
7	*17*	3

36. Квадрат заповнено дев'ятьма послідовними непарними натуральними числами, перше з яких 1.

37

23	2	17
8	*14*	20
11	*26*	5

38

24	3	*18*
9	15	21
12	27	*6*

39

18	4	14
8	12	*16*
10	20	6

37. Квадрат заповнено дев'ятьма натуральними числами, які є членами арифметичної прогресії (де $a = 2$, $d = 3$).

38. Квадрат заповнено числами 3, 6, 9, ..., 27.

39. Квадрат заповнено числами 4, 6, 8, ..., 20.

До стор. 13—14

1. 9876; 1023.

2. 5210; 1025.

3. 981; 109.

4. 852; 352.

5. а) 5432; б) 1023.

6. 5701; 5811; 5921.

7. 3601; 3711; 3821; 3931;
6602; 6712; 6822; 6932;
9603; 9713; 9823; 9933.

8. 550; 671; 792.

9. 421; 842.

10. а) $33 \cdot 3 + 3 : 3 = 100$
б) $(333 - 33) : 3 = 100$
в) $(222 - 22) : 2 = 100$
г) $(2222 - 222) : 2 = 1000$
д) $111 - 11 = 100$
е) $1111 - 111 = 1000$.

11. $(1 + 2 + 3) \cdot 5 + 40 + 6 + 7 + 8 + 9 = 100$.

12. $1 : 1 - 1 = 0$; $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; $1 + 1 \cdot 1 = 2$; $1 + 1 + 1 = 3$; $11 - 1 = 10$; $11 \cdot 1 = 11$; $11 + 1 = 12$; 111.

13. а) 897 645; 801 245; б) 4 986 237; 4 015 237;
в) 986 537; 901 237; г) 48 965 173; 48 025 173.

14. $2 + 2 - 2 - 2 : 2 = 1$; $2 + 2 + 2 - 2 - 2 = 2$;
$2 + 2 - 2 + 2 : 2 = 3$; $2 : 2 + 2 : 2 + 2 = 4$;
$2 \cdot 2 - 2 : 2 + 2 = 5$; $2 \cdot 2 : 2 + 2 \cdot 2 = 6$; $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 : 2 = 7$;
$(2 : 2 + 2) \cdot 2 + 2 = 8$; $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 : 2 = 9$;
$(2 + 2 + 2) \cdot 2 - 2 = 10$.

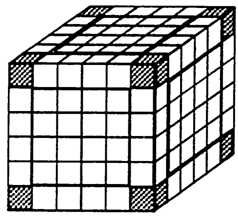
З а у в а ж е н н я. Не всі з чисел записуються єдиним способом. Для прикладу: $2 \cdot 2 : 2 - 2 : 2 = 1$, чи $2 : 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 7$ тощо.

15. а) 11^{11}; б) 2^{22}; в) 3^{33}; г) 4^{4^4}; д) 111. Найменшим числом для кожної з цих вправ є 0.
16. 4 і 84.
17. 1 і 21; 2 і 42; 3 і 63; 4 і 84.
18. 3 і 93.
19. 1 і 11; 2 і 22; 3 і 33; ...; 9 і 99.
20. 123 − 4 − 5 − 6 − 7 + 8 − 9.
21. Від 1 до 49 нараховується 24 парних числа. Отже, таких сум є 12.
22. 6-ма способами.

23.

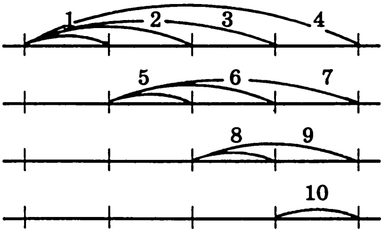
	Повні	Заповнені наполовину	Порожні
I	3	1	3
II	2	3	2
III	2	3	2

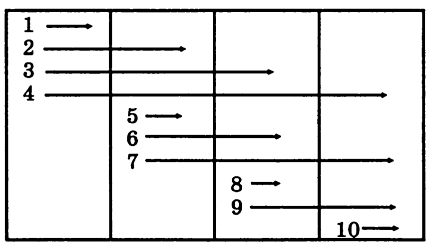
24. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ кубиків. Кубиків із пофарбованими трьома гранями 8 (на вершинах куба). Кубиків із пофарбованими двома гранями $4 \cdot 12 = 48$ (на ребрах куба). Кубиків із пофарбованою однією гранню $16 \cdot 6 = 96$ (6 граней куба $4 \cdot 4$). Зовсім непофарбованих $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

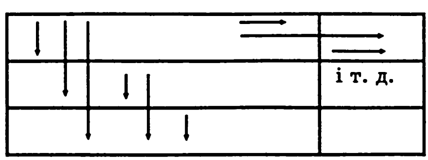


До стор. 15—16

Показуємо метод підрахунку відрізків на прямій і, як аналогія, підрахунок прямокутників.







1. а) 36; б) 60; в) 100.
2. 45.
3. 380.
4. 28.
5. а) 181; б) 255; в) 321.
6. Непарне.

7. а) 21; б) 20; в) 20; г) 11.
8. *Вказівка.* Виходимо з того, що в п'ятикутнику з однієї вершини виходять дві діагоналі (тобто $5 - 3 = 2$); в десятикутнику — 7 $(10 - 3 = 7)$; в двадцятикутнику — 17 $(20 - 3 = 17)$; в n-кутнику $(n - 3)$ діагоналі. Але дві вершини сполучено однією діагоналлю. Тому число діагоналей в: п'ятикутнику $\frac{(5-3)\cdot 5}{2} = 5$; десятикутнику $\frac{(10-3)\cdot 10}{2} = 35$; в двадцятикутнику $\frac{(20-3)\cdot 20}{2} = 170$; в n-кутнику $\frac{n(n-3)}{2}$ діагоналей.

До стор. 17—20

1. 5 землекопів.
2. 24 км.
3. 20.
4. Протягом 5 хв бабуся смажить 4 котлети з одного боку. У наступні 5 хв вона знімає дві котлети із сковорідки і кладе дві із залишених, інші дві, що підсмажилося з одного боку, перевертає на другий бік. Отже, за 10 хв підсмажилося дві котлети повністю, а 4 котлети — з одного боку. За наступні 5 хв підсмажаться 4 котлети з другого боку.
5. 66 років.
6. Наповнивши 9-літрову посудину, виливаємо з неї двічі по 4 л. Один літр, що залишився в ній, переливаємо в 4-літрову посудину. Наповнивши 9-літрову посудину ще раз, відливаємо з неї 3 л води в 4-літрову (додаючи воду до 1 л). Отже, в 9-літровій посудині залишиться 6 л води.
7. Наповненою 3-літровою банкою молоко двічі виливають у 5-літрову. У 3-літровій банці залишиться один літр молока. Виливши цей літр молока в 5-літрову банку (попередньо виливши з неї молоко в 10-літрову) і доливши ще 3 л, маємо 4 літра молока.
8. Із наповненої 7-літрової банки молоко двічі виливають у 3-літрову. У ній залишається один літр молока. Тепер, виливши сюди молоко з 3-літрової банки, мають 4 літра молока.
9. Одне. Поклавши на кожну шальку терезів по кульці, відразу бачимо, де фальшива. Якщо потрапила на терези, то вона знаходиться на шальці з меншою вагою. Якщо ж терези у рівновазі, то вона — не на терезах.
10. Два. Розділимо монети на три купки (по 3 у кожній). Зваживши дві купки, визначаємо, в якій із них — фальшива. Ту купку, в якій фальшива монета, розділимо знову на 3 частини (по одній монеті).

Покладемо на шальки терезів по одній монеті, визначаємо, де фальшива.

11. Три. Розділимо монети на три купки (по 9 у кожній). Першим зважуванням дізнаємося, у якій купці знаходиться фальшива монета. Другим зважуванням, розділивши 9 монет, між якими є фальшива, на купки (знову по 3), дізнаємося, у якій купці фальшива. Тепер залишається зробити ще одне зважування.
12. Розважити цукор навпіл і висипати в торбину 8 кг. Вісім кілограмів, що залишилися на шальці, розважити навпіл і висипати в торбину ще 4 кг. Решту 4 кг розважити порівну і висипати в торбину 2 кг. В торбині буде $8 + 4 + 2 = 14$ (кг).
13. На одну шальку терезів покласти обидві гирі (800 г) і насипати на шальки крупу так, щоб терези були в рівновазі. Зрозуміло, що на шальці з гирями буде 3 кг 600 г крупи. Розважити цю крупу порівну, дістанемо 1 кг 800 г крупи.
14. Розділити деталі на частини: 3, 3, 2. Поклавши на шальки терезів 3 і 3 деталі, визначаємо, у якій частині знаходиться легша деталь. Наступним зважуванням знаходимо легшу деталь.
15. П'ять неділь і п'ять серед жоден місяць не може мати: перша середа, в кращому випадку, припаде на 4-те число місяця, друга — на 11-те, третя — на 18-те, четверта — на 25-те, а п'ята перейде до наступного місяця. П'ятикратне поєднання інших днів можливе.
16. Будь-який день, якщо він випадає на перше число, а в лютому 29 днів.
17. 1 м 35 см і 81 см.
18. 2; 3; 4. Звичайно, цю задачу легко розв'язати за допомогою рівняння. Нехай середній брат має x олівців, тоді молодший має $x - 1$ олівець і старший $x + 1$ олівець. Складемо рівняння: $x - 1 + x + x + 1 = 9$; $3x = 9$; $x = 3$.
19. 20 к.
20. Запишемо суму натуральних чисел від 1 до 100: $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$. Гаусс побачив, що $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \dots = 101$. Таких пар буде 50. Отже, $101 \cdot 50 = 5050$ і є сума чисел від 1 до 100.
21. а) 2500; б) 250 000; в) 50; г) 1050; д) 1683.
22. а) 2; б) 4; в) 6; г) 12; д) 24.
23. а) $2 - 2 + 2 - 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 = 8$;
    б) $2 - 2 + 2 - 2 + (2 + 2 + 2) : 2 = 3$;
    в) $2 - 2 + 2 - 2 + (2 + 2 + 2) \cdot 2 = 12$;
    г) $2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 : 2 = 1$;
    д) $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 20$.
24. 0.
25. $2 + 2 = 2 \cdot 2$
26. $n + 1 > n \cdot 1$.
27. а) 1, 4, 5, 6, 9; б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; в) 1, 5, 6.

28. а) Ні (квадрати натуральних чисел не закінчуються на 8, на 3, на 2); б) двоцифрові числа ні, бо вже $10^3 = 1000$, а із одноцифрових чисел доводиться випробовувати 8^3 і 7^3.

29. $10^{16} = 10^8 \cdot 10^8$; $20^8 = 2^8 \cdot 10^8$ (або подати 10^{16} як 100^8). Отже, $10^{16} > 20^8$.

30. $100^{18} = 100^9 \cdot 100^9$; $9500^9 = 95^9 \cdot 100^9$. Отже, $100^{18} > 9500^9$.

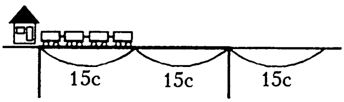
31. Можна. Кожен хлопчик має одержати $\frac{5}{6}$ яблука. Але $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Отже, треба 3 яблука розрізати на половинки і 2 яблука — на третинки.

32. Можна. Кожен хлопчик має одержати $\frac{7}{12}$ яблука ($\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$). Отже, треба розрізати 4 яблука на третинки і 3 яблука — на четвертинки.

33. Знайдемо найменше число, яке ділиться на 2, 3, 4, 5, 6. Таке число буде $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$. Отже, шукане число $60 - 1 = 59$.

34. Найменше число, що ділиться на 7 і 8 є 56. Отже шукане число 55.

35. Потяг проїжджає відстань, яка дорівнює його довжині за 15 с. За 45 с він проїде відстань, яка в три рази більша за його довжину. Отже, на мосту вміщаються дві довжини потяга. Тому його довжина 225 м. Швидкість 54 км/год.



36. 30 або 90.

37. $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ — послідовні парні числа. $2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 6n + 6 = 6(n + 1)$ — ділиться на 6.

38. $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 5n + 10 = 5 \cdot (n + 2)$ — ділиться на 5.

39. $2n + 2n + 2 + 2n + 4 + 2n + 6 = 8n + 12$ — не ділиться на 8.

40. Інтуїція підказує, що слід випробувати найпростіші дроби: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. І відразу видно, що третій дріб є $\frac{1}{6}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

41. Звертаємо увагу, що $37 \cdot 3 = 111$. Отже, 111 ділиться на 37. Значить, 222, 333, 444 і т.д. діляться на 37.

42. 111 111 : 37 = 3003. Отже, 222 222, 333 333 і т.д. діляться на 37.

43. -7; -31.

44. -5 і -77; -7 і -55; -11 і -35; -1 і -385.

45. а) $(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4 \cdot (n + 4)$; б) $2n(2n + 2) = 4n(n + 1)$ (одне із чисел n або $n + 1$ є парним).

46. 20, 21, 22, 23.

47. З чисел $2n-1$, $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$ складаємо рівняння: $(2n+1)(2n+3)-(2n-1)(2n+5)=8$; $4n^2+8n+3-(4n^2+8n-5)=8$; $8=8$.

Висновок: будь-які чотири послідовні непарні натуральні числа мають саме таку властивість.

48. З чисел: n, $n+1$, $n+2$ складаємо рівняння: $(n+1)^2-n(n+2)=1$, $n^2+2n+1-n^2-2n=1$, $1=1$.

Висновок: будь-які три послідовні натуральні числа мають саме таку властивість.

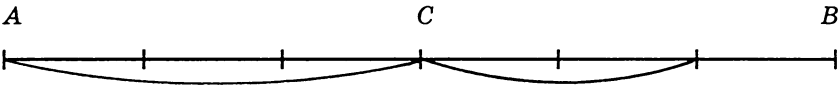
49. Число, яке при діленні на 25 дає в остачі 5, закінчується 0 або 5. Отже, одним із множників даного числа обов'язково є 5, а квадрат його матиме множник 25.

Друге доведення. Задане число запишемо так: $25n+5$, або $5\cdot(5n+1)$. Його квадрат — $25\cdot(5n+1)^2$ ділиться на 25.

50. Кожне з таких чисел має співмножник 5, а добуток цих чисел має множник уже 25.

До стор. 21—22

1. Виділене зерно зобразимо відрізком AB. Курям на один місяць потрібно $\frac{1}{2}$ зерна (це відповідає половині відрізка). Для качок на один місяць потрібно $\frac{1}{3}$ всього зерна (це відповідає третині відрізка). Отже, курям і качкам на один місяць потрібно $\frac{5}{6}$ всього зерна ($\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$).

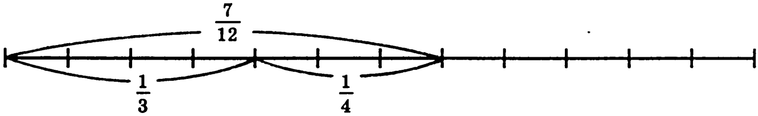


$\frac{1}{2}$ зерна для курей на 1 місяць $\quad$ $\frac{1}{3}$ зерна для качок на 1 місяць

Залишилося $\frac{1}{6}$ зерна для годівлі курей і качок. Цієї кількості зерна вистачить на $\frac{1}{5}$ місяця, тобто на 6 днів (прийнявши, що місяць має 30 днів).

Відповідь: для спільної годівлі курей і качок виділеного зерна вистачить на $1\frac{1}{5}$ місяця (на 1 місяць і 6 днів).

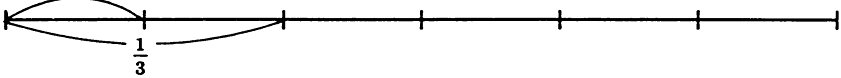
2.

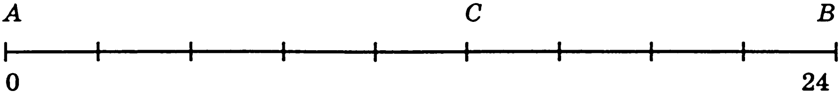


На $\frac{7}{12}$ припадає 21. Тоді на $\frac{1}{12}$ припадає 3. Отже, шукане число 36. (Щоб обійтися без ілюстрації, міркуємо так: $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=\frac{7}{12}x$; $\frac{7}{12}x=21$; $x=36$).

3. 40.

4. $\frac{1}{2}$ третини є $\frac{1}{6}$ всього числа і дорівнює 60. Шукане число $60 \cdot 6 = 360$.



5. 

Відрізок AB зображає всю добу від 0 до 24 години, а точка C позначає теперішню годину. $CB = \frac{4}{5} AC$. Отже, всю добу поділено на 9 частин. AC відповідає 5 частинам: $(24 : 9) \cdot 5 = 13\frac{1}{3}$ (год), або 13 год 20 хв.

6. Дні місяця доцільно зобразити на відрізку. Тоді а) п'ятниця, 19 квітня; б) четвер, 25 квітня; в) п'ятниця, 26 квітня; г) середа, 10 квітня; д) неділя, 15 квітня.

7. І. Відстань до пункту позначимо через x, час руху велосипедиста в першому випадку дорівнює $x : 15$, а в другому — $x : 10$. Складаємо рівняння: $\frac{x}{15} + 1 = \frac{x}{10} - 1$. $2x + 30 = 3x - 30$, $x = 60$.

Отже, відстань 60 км, а час його руху в першому випадку — 4 год. Але він має рухатися 5 год, тому його швидкість 12 км/год.

ІІ. При швидкості велосипедиста 15 км/год він прибуде на 1 год раніше, а при швидкості 10 км/год запізниться на 1 год. Отже, різниця руху в часі у першому і другому випадках складає 2 год.

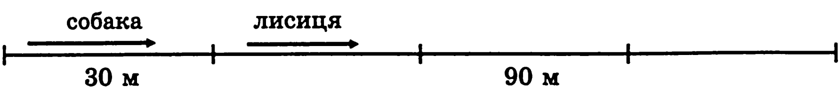
Тепер міркуємо, що на 15 і 10 діляться числа 30, 60, 90 і т.д. Отже, якщо відстань 60 км — то різниця в часі саме 2 год і велосипедист має рухатися 5 год зі швидкістю 12 км/год.

8. 4 хв.
9. 5 хв.
10. 3 кг.
11. 9 грн.
12. 6 кг.
13. 2,4 хв.
14. Кількість пакетів по 5 кг позначимо через x, а пакетів по 3 кг — через y. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 24, \\ 5x = 3y;. \end{cases} \quad \begin{cases} y = 24 - x, \\ 5x = 72 - 3x; \end{cases}$$

Звідси: $x = 9$; $y = 15$.

Отже, пакетів по 5 кг є 9, а пакетів по 3 кг — 15.

15. 

Відповідь: 120 м.

16. I. Якби автомобіль рухався з попередньою швидкістю, то за 8 год він не доїхав би 80 км. Отже, за 2 год він мав проїхати 80 км. Звідси його швидкість — 40 км/год, а відстань 400 км.

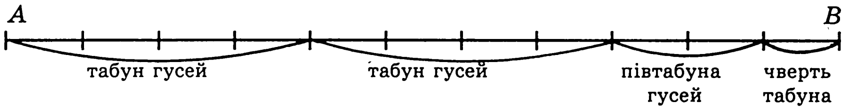
II. Позначимо швидкість автомобіля через x. За 10 год він проїде $10x$ км. При швидкості $(x + 10)$ за 8 год він проїде відстань $8(x + 10)$ км. Маємо рівняння: $10x = 8(x + 10)$. Звідси $x = 40$.

Відповідь: 400 км, 40 км/год.

До стор. 23—25

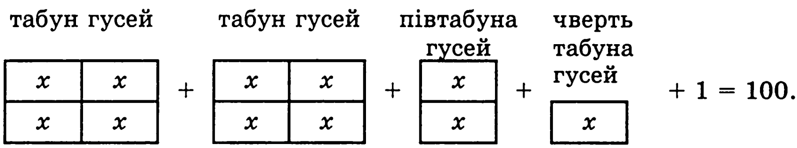
1. I. Нехай летіло x гусей. Складаємо рівняння:
$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$. Звідси $x = 36$.

II. Відрізком зобразимо табун гусей. Відповіді вожака табуна відкладемо відрізком і його частинами. Знайдемо, що у відрізку AB вміщається 11 чвертей табуна, які складають 99 гусей (100 − 1).



Отже, 99 : 11 = 9, тому в табуні $9 \cdot 4 = 36$ гусей.

III. Та чи не найзрозуміліше подати розв'язання у вигляді діаграмного малюнка:



Тоді $11x + 1 = 100$. Звідси $x = 9$. В табуні було 36 гусей.

2. I. Звичайно, що за допомогою рівняння задача розв'язується просто. Нехай у школі Піфагора було x учнів. Маємо таке рівняння:
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$. Звідси $x = 28$.

II. Моделюючи задачу за допомогою відрізка, доводиться ділити відрізок на 28 частин, оскільки маємо $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$. На 3 "діви" припадає $\frac{3}{28}$ відрізка. Отже, у школі Піфагора було 28 учнів.

3. $\frac{1}{10}$ діжки вип'ють чоловік з дружиною за 1 день, $\frac{1}{14}$ діжки вип'є сам чоловік за 1 день. $\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ діжки випила б сама дружина за 1 день. Отже, дружина випила б самостійно діжку пива за 35 днів.

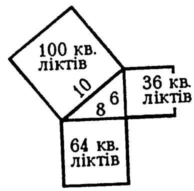
4. Віл, кінь, коза разом з'їли б за 1 годину $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ (пласта). Отже, $1 : \frac{11}{6} = \frac{6}{11}$.

В і д п о в і д ь. $\frac{6}{11}$ години.

5. Усю череду зобразимо відрізком AB. Розглянемо третину череди — відрізок CB. А далі, поділивши CB на три рівні частини, бачимо, що CD і складає отих 70 биків. Неважко бачити, що CB відповідає 105 бикам. А у всій череді було 315 биків.

6. I. Позначимо сторони квадратів через x, y (і нехай сторона меншого квадрата —y). За умовою задачі маємо, що $y = \frac{3}{4}x$. Маємо рівняння $x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 100$. Звідси $x = 8$. Тоді $y = 6$. Площа однієї частини поля 64 кв. лікті, площа другої частини 36 кв. ліктів.

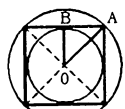
II. Із “єгипетського” (прямокутного) трикутника зі сторонами 3, 4, 5 маємо похідний трикутник зі сторонами 6, 8, 10. За теоремою Піфагора, $6^2 + 8^2 = 10^2$.



7. Вірність твердження видно з малюнка. Якщо $OB = 1$, то $OA = \sqrt{2}$. Отже,

$S_{\text{впис.круга}} = \pi$ (кв. од.)

$S_{\text{опис.круга}} = 2\pi$ (кв. од.)



8. I II III IV

$x + 2x + 6x + 24x = 132,$

$33x = 132,\ x = 4.$

9. I. Розв’язання подамо у вигляді таблиці, де покажемо, скільки і в якому місті відібрали у купця майна і скільки майна залишилося в нього під час виходу з кожного міста.

	I місто	II місто	III місто
Взяли майна	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$ від $\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}$ від $\frac{1}{36}=\frac{5}{216}$
Залишилося майна	$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}-\frac{5}{36}=\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}-\frac{5}{216}=\frac{1}{216}$, що становить 11 грошів

Отже,в купця було під час входу в перше місто 2376 грошів.

II. Другий опосіб полягає в тому, що розв’язання задачі здійснюємо з кінця. Оскільки у кожному місті в купця відбирали $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ майна, то в нього завжди залишалося $\frac{1}{6}$ майна. Якщо купець, вийшовши з третього міста, мав у наявності 11 грошів, то входячи в це місто, він мав $11 \cdot 6 = 66$ (грошів). Входячи в друге місто він мав $66 \cdot 6 = 396$ (грошів). Входячи в перше місто він мав $396 \cdot 6 = 2376$ (грошів).

Відповідь. 2376 грошів.

10. Подаємо один із способів розв'язання. Позначимо місткість водойми 1.

I труба за 1 год заповнить всю водойму,

II труба за 1 год заповнить $\frac{1}{2}$ водойми,

III труба за 1 год заповнить $\frac{1}{3}$ водойми.

За годину всі труби разом заповнять $1\frac{5}{6}$ водойми. Або одна водойма буде заповнена за $1 : 1\frac{5}{6} = \frac{6}{11}$ год.

11. Позначимо через x гроші виграшу першого власника півня, які він має дати (за умовою) тому "одному глядачеві". Сюди входить 12 монет плюс $\frac{3}{4}$ монет можливого його виграшу. Аналогічні міркування щодо другого власника півня (виграш якого y монет). Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - \frac{3}{4}y = 12, \\ y - \frac{2}{3}x = 12. \end{cases}$$

Звідси $x = 42$, $y = 40$.

Відповідь. 42 монети, 40 монет.

12. Задача варта того, щоб її розв'язання провести двома способами. Маємо на увазі і мислення рівняннями, і мислення образами.

I. Для спрощення приймемо, що один чоловік одержав A монет, другий $Б$ монет. Складаємо систему рівнянь:

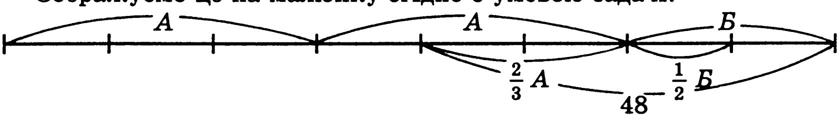
$$\begin{cases} A + \frac{1}{2}Б = 48, \\ \frac{2}{3}A + Б = 48. \end{cases}$$

Звідси $A = 36$, $Б = 24$

II. Мислення логічне зобразимо малюнком.

Якщо $A + \frac{1}{2}Б = 48$, то $2A + Б = 96$.

Зображуємо це на малюнку згідно з умовою задачі.



Бачимо, що $Б + \frac{2}{3}A = 48$, $A + \frac{1}{2}Б = 48$. Тепер видно, що $\frac{1}{3}A = \frac{1}{2}Б$. (До речі, все це беззаперечно, бо аргументовано.)

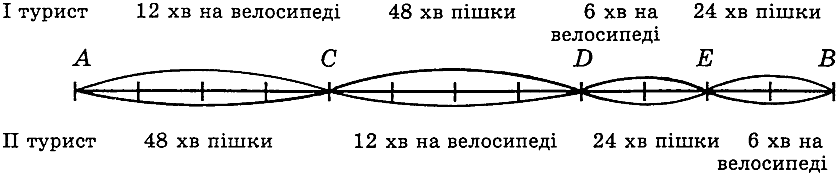
Тоді $48 : 4 = 12$. Отже, $A = 36$, $Б = 24$.

13. Нехай A буде в дорозі x годин, тоді $Б$ — $(x - 1)$ год. Складемо рівняння: $\frac{7}{2}x + \frac{8}{3}(x - 1) = 59$. Звідси $x = 10$. Отже, A проїде $\frac{7}{2} \cdot 10 =$ $= 35$ (миль).

14. У числі 93 закреслено 9, одержали 3.

15. У числі 82 закреслено 8, одержали 2.

16. Відрізок AB (12 км) поділимо на 12 частин.

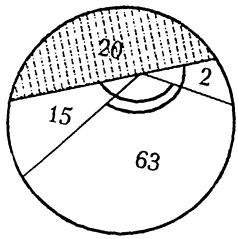


Перший турист залишає велосипед у точці C і далі рухається пішки. В точку D вони прибувають одночасно. Потім перший турист, їдучи на велосипеді, залишає велосипед у точці E для другого туриста, який прибуде туди через 24 хв. До точки B вони прибувають одночасно.

17. а) 33 кульки, б) 24 кульки.

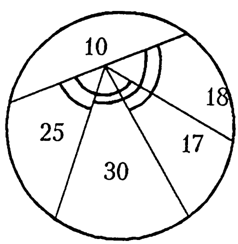
18. 63.

20 туристів не знали ні французької, ні німецької мов. 2 туристи не знали французької; 15 туристів не знали німецької. Отже, 63 туристи знали і французьку, і німецьку мови.



19. 10 туристів не знали ні англійської, ні французької, ні німецької мов; 18 не знали англійської; 25 не знали французької; 30 не знали німецької.

Отже, 17 туристів знали англійську, французьку і німецьку мови.



20. 250%.

21. Відповідь. 27 виписують “Барвінок” і “Соняшник”; 7 виписують “Соняшник”; 21 виписують “Барвінок”; 20 виписують “Юний технік”; 25 учнів зовсім не виписують журналів.

22. 13.

23. 15; 16; 17; 18. Кожне наступне число більше від попереднього на 1. Отже, коли б усі числа були рівними і дорівнювали першому числу, то їх сума була б 60. Тому перше число є 15.

24. 29; 39.

25. Усіх поранень 310 (70 + 75 + 80 + 85) на 100 піратів. Мінімальна кількість піратів, які дістали 4 поранення, буде тоді, коли решта піратів дістануть по три поранення. Нехай усі 100 піратів дістали по три поранення ($3 \cdot 100 = 300$ поранень), тоді 10 поранень ($310 - 300$) будуть "зайвими". Отже, 10 піратів мають дістати по чотири поранення. Самостійно розгляньте: яка максимальна кількість піратів дістане по чотири поранення кожний і як розподіляться поранення між іншими піратами.

До стор. 27—32

6. а) 3210; 1023; б) 3210; 1032; в) 3120; 1320.

7. 9864; 1026.

8. 9990; 1008.

9. $\underbrace{11111\ldots1}_{27\text{ одиниць}} : \underbrace{11111\ldots1}_{9\text{ одиниць}} = 1\underbrace{0000\ldots0}_{8\text{ нулів}}1\underbrace{0000\ldots0}_{8\text{ нулів}}1$

Дільник ділиться на 9, а частка ділиться на 3. Отже, ділене ділиться на 27.

10. Не ділиться.

11. Ділиться. Розв'язання аналогічне до розв'язання задачі 9.

12. $$-\begin{array}{r}\overline{7abc}\\ \underline{\overline{abc7}}\\ 864.\end{array}$$ Отже, $$-\begin{array}{r}7681\\ \underline{6817}\\ 864\end{array}$$

Шукане число 7681.

13. Початкове число 6571.

14. Нехай початкове число $\overline{1abcde}$ (буквами позначено цифри числа). Якщо 1 переставити на останнє місце, дістанемо число $\overline{abcde1}$. З умови задачі маємо:

$$\times\begin{array}{r}\overline{1abcde}\\ \underline{3}\\ \overline{abcde1}\end{array}$$

Відразу видно, що $e = 7$. Продовжуючи аналогічні міркування, знаходимо, що $d = 5$, $c = 8$, $b = 2$, $a = 4$.

Отже, початкове число: 142 857.

15. 285 714.

16. Ні.

17. Такі числа вказано в задачах 14 і 15. Більше таких чисел не існує.

18. $\overline{ab}$ — двоцифрове число, $\overline{aabb}$ — чотирицифрове число.

За умовою задачі запишемо:

$$\times\begin{array}{r}\overline{ab}\\ 77\\ \hline ***\\ ***\\ \hline \overline{aabb}\end{array}$$

Розв'язавши цей приклад, дістанемо число $\overline{ab} = 15$.

19. Обидва числа мають бути кратні числу 24, а отже, і їх сума має ділитися на 24. Оскільки $168 = 24 \cdot 7$, то натуральні числа такі: 24 і 144, або 48 і 120, або 72 і 96.

20. 729 (бо $27^2 = (3^3)^2$, $9^3 = (3^2)^3$.

21. Кролі: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

22. Знайти, що 11^6 закінчується на 1, 14^6 закінчується на 6, 13^3 закінчується на 7. Отже, шукане число закінчується на 0, а тому ділиться на 10.

23. $3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 10(3^n - 2^{n-1})$.

24. Подамо ці числа так: $a = 2^{45} = (2^5)^9 = 32^9$; $b = 3^{36} = (3^4)^9 = 81^9$; $c = 4^{27} = (4^3)^9 = 64^9$; $d = 5^{18} = (5^2)^9 = 25^9$.

Маємо: $d < a < c < b$.

25. Таке число має розкладатися на множники:

$2^3 \cdot 3^2 = 72$, і тоді $72 \cdot 2 = 12^2$ і $72 \cdot 3 = 6^3$.

26. $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ — трицифрові числа.

$100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 100(a - c) + (c - a) = (a - c)(100 - - 1) = 99(a - c) = 9 \cdot 11(a - c) \neq N^2$, бо $a - c \neq 11$, оскільки a і c — одноцифрові числа.

27. Перший дріб більший, бо $\frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1} - \frac{10^{11} + 1}{10^{12} + 1} > 0$.

Звівши до спільного знаменника і виконавши перетворення в чисельнику, дістанемо $10^{10} \cdot 101 - 2 \cdot 10^{11} > 0$.

28. Число ділиться на 15, якщо воно одночасно ділиться на 3 і 5. Кожен з доданків суми ділиться на 3. Встановлюємо, якими цифрами закінчується кожен доданок. $21^{18} = ...1$; $24^{19} = ...4$; $45^7 = ...5$. Отже, цей вираз закінчується 0, а значить, ділиться на 5. Тому цей вираз ділиться націло на 15.

29. а) 2; 7. б) 0; 5.

30. а) 1; б) 1; в) 1; г) 1.

Вказівка. $16 = 15 + 1$, а $(15 + 1)(15 + 1) = 15^2 + 2 \cdot 15 + 1$ при діленні на 3 дає остачу 1. Аналогічно $(15 + 1)(15 + 1)(15 + 1)$ і т.д. при діленні на 3 дає остачу 1.

31. $16 = 3 \cdot 5 + 1$, $16^n = (3 \cdot 5 + 1)^n$. Якщо піднести двочлен до степеня, то всі члени розкладу кратні 3, крім останнього 1^n. Отже, при діленні 16^n на 3 дістанемо остачу 1.

32. а) 2; б) 1; в) 2; г) 1.

Вказівка. $26^3 = (24 + 2)^3$. При діленні $2^3 = 8$ на 3 дістанемо остачу 2. Аналогічно розглядаємо 26^4, 26^5, 26^6 при діленні на 3.

33. Остача 2 при непарному n, остача 1 при парному n.

34. 1, бо 46^n закінчується цифрою 6.

35. Остачу визначаємо за цифрою, якою закінчується число:

а) $23^5 = ...3$, то остача 3;

б) $23^6 = ...9$, то остача 4;

в) $23^7 = ...7$, то остача 2.

36. 0, оскільки $14^5 = 7^5 \cdot 2^5 = 7^5 \cdot 2^3 \cdot 4$
37. 25.
38. 36.
39. $12^6 = 3^6 \cdot 2^{12}$. Отже, у числі з основою 3 є 6 дільників, у числі з основою 2 — 12 дільників і 72 дільники з основами 2 і 3. Крім того, 1 є також дільником. Таким чином, є $1 + 6 + 12 + 72 = 91$ дільник.
40. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Розглядаючи три послідовні натуральні числа $p - 1, p, p + 1$, з яких p — просте (за умовою), робимо висновок, що $p - 1$ і $p + 1$ числа парні, одне з яких ділиться на 3 (бо p при діленні на 3 дає остачу 1 або 2), а одне ділиться на 4 (бо p при діленні на 4 дає остачу 1 або 3, то значить — або попереднє, або наступне число відносно p ділиться на 4). Отже, $p^2 - 1$ розкладається на множники, між якими є обов'язково 2, 3, 4. Отже, $p^2 - 1$ кратне 24.
41. Розглянемо рівність $2q^2 = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Оскільки $p - 1$ і $p + 1$ парні числа, то і q має бути парним. А таке число єдине, тобто $q = 2$. Звідси випливає, що $p = 3$.
42. Числами, некратними 3, є $3n + 1$ і $3n + 2$. Тепер розглянемо вказану в умові задачі різницю: $(3n + 1)^2 - 1 = 3n(3n + 2)$ — кратне 3; $(3n + 2)^2 - 1 = (3n + 1)(3n + 3)$ — кратне 3.
43. Нехай у касира було x двадцятип'ятикопійкових монет, тоді $(46 - x)$ десятикопійкових монет. Складаємо рівняння: $25x + 10(46 - x) = 835$. Звідки $x = 25$. Отже, в касира було 25 двадцятип'ятикопійкових монет і 21 — десятикопійкова.
44. $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3} = 3^n(1 + 3 + 9 + 27) = 3^n \cdot 40$ — ділиться на 120.
45. Оскільки 5^n завжди закінчується цифрою 5, то 8^m має закінчуватися цифрою 6. $8^1 = 8$; $8^2 = 64$; $8^3 = 512$; $8^4 = 4096$; $8^5 = 32\,768 > 10\,000$. Отже, $m = 4$. Враховуючи, що $8^4 + 5^n \le 10000$, маємо $n = 5$.
46. Визначаємо цифри, якими закінчується дванадцята степінь будь-якого числа: $0^{12} = 0$; $1^{12} = 1$; $2^{12} = ...6$; $3^{12} = ...1$; $4^{12} = ...6$; $5^{12} = ...5$; $6^{12} = ...6$; $7^{12} = ...1$; $8^{12} = ...6$; $9^{12} = ...1$.

Тепер можна зробити висновок про те, якими цифрами закінчуються числа a, b, c, d:

1) одне з цих чисел закінчується цифрою 1, 3, 7 або 9, а інші три числа закінчуються на 0;

2) одне із чисел закінчується цифрою 2, 4, 6 або 8, друге закінчується цифрою 5, а інші два числа закінчуються на 0;

3) три числа закінчуються цифрою 5, а четверте — цифрою 2, 4, 6 або 8;

4) два числа закінчуються цифрою 5, третє — цифрою 1, 3, 7 або 9, а четверте — цифрою 0.

47. $3^{4n} + 44 = ...1 + 44 = ...5$ — ділиться на 5.
48. $37^8 + 9 = ...1 + 9 = ...0$ — ділиться на 10.

49. $64^{64} - 1 = ...6 - 1 = ...5$ — ділиться на 5.

50. $n^{25} - n^{13} = n(n^{24} - n^{12}) = n \cdot (...0) = ...0$ — ділиться на 10.

(24-й степінь і 12-й степінь будь-якого числа закінчується однаковими цифрами.)

51. Кожен з доданків ділиться на 3, а, отже, і сума ділиться на 3. Визначаємо, що 27^{12} закінчується цифрою 1, 72^{10} закінчується цифрою 4, а 45^{8} закінчується цифрою 5. Тому сума закінчується нулем, і вказане в умові задачі число ділиться на 30.

52. $a = 4n$, $b = 2(2n - 1)$, $c = n$, де n — натуральне число (бо $27^{4n} = ...1$; $72^{2(2n-1)} = ...4$; $45^{n} = ...5$, де n — натуральне число). Сума степенів закінчується нулем, і кожний із доданків ділиться на 3, отже, число ділиться на 30.

53. $45^{n} = ...5$, $33^{4n + 1} = 3$, $51^{3n} = ...1$. Число закінчується цифрою 9.

54. $2^{33} - 2^{32} = 2^{32}$, $2^{32} - 2^{31} = 2^{31}$, $2^{31} - 2^{30} = 2^{30}$, ..., $2^{2} - 2 = 2$, $2 - 1 = 1$. Значення виразу дорівнює 1.

55. Різниця $10^{k} - 7$ (k — натуральне) утворює число, записане дев'ятками і трійкою. Отже, воно ділиться на 3.

56. $2^{4} = 16$ (закінчується цифрою 6), тому 2^{4n} теж закінчується цифрою 6. Отже, $2^{4n} - 1$ закінчується цифрою 5.

57. Число записане буквами, де букви означають цифри числа, прийнято позначати рискою над буквами. Для цього шестицифрового числа не має значення, яку цифру приймаємо першою (чи зліва — направо, чи справа — наліво), тому дане шестицифрове число таке:

$\overline{cbacba} = 10^{5}c + 10^{4}b + 10^{3}a + 10^{2}c + 10b + a = 10^{2}c \cdot 1001 + 10b \cdot 1001 + a \cdot 1001 = 1001 \cdot (10^{2}c + 10b + a)$.

Отже, число $\overline{cbacba}$ ділиться на 7, 11, 13. ($1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).

58. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 10(a + b) + (a + b) = 11 \cdot (a + b)$, що кратне 11.

59. $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 100(a + b + c) + 10(a + b + c) + (a + b + c) = 111(a + b + c)$, що кратне 111.

60. $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 100(a - c) - (a - c) = 99(a - c)$, що кратне 99.

61. x, $x + 1$, $x + 2$ — послідовні натуральні числа. Складаємо рівняння відповідно до умови задачі:

$(x + 1)^{2} - 1 = x(x + 2)$,

$x^{2} + 2x = x^{2} + 2x$, x — будь-яке. Отже, таку властивість мають будь-які три послідовні натуральні числа.

62. Відомо, що коли кожний з двох доданків ділиться на якесь число, то й сума ділиться на це число. Але якщо кожний з двох доданків не ділиться на якесь число, то сума цих доданків може ділитися на це число (а може й не ділитися).

Неважко побачити, що коли якесь число n ділиться на m, то n

можна розкласти на два доданки ($k + l$, де l може бути й нулем), кожний із яких ділиться на m. Нехай x і y діляться на 17 (наприклад, $x = 17a$, $y = 17b$), то, зрозуміло, що $5x + 2y$ і $9x + 7y$ діляться на 17.

Але, якщо x і y не діляться на 17, то треба довести, що обидва двочлени є такими, що при певних значеннях змінних діляться на 17.

Задача 62 заслуговує на те, щоб її розглянути детальніше.

I. ***Доведення.*** Домножимо двочлени $5x + 2y$ і $9x + 7y$ відповідно на 7 і 2. Знайдемо їх різницю ($5x \cdot 7 + 2y \cdot 7 - 9x \cdot 2 - 7y \cdot 2$). В результаті дістанемо $17x$, що ділиться на 17 при будь-яких значеннях x. Оскільки $(5x + 2y) \vdots 17$ за умовою і $17x \vdots 17$, то й $(9x + 7y) \vdots 17$. Якщо зменшуване і різниця діляться на якесь число, то й від'ємник ділиться на це число.

II. Доведення можна замінити знаходженням усіх значень x і y, при яких двочлени діляться на 17. Якщо $5x + 2y$ ділиться на 17, то $5x + 2y = 17a$. Для того, щоб вираз $9x + 7y$ ділився на 17, треба щоб $9x + 7y = 17b$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 2y = 17a, \\ 9x + 7y = 17b, \end{cases}$$

дістанемо, що $x = 7a - 2b$, $y = 5b - 9a$.

Тепер легко знайти значення виразів $5x + 2y$ і $9x + 7y$, що діляться на 17.

З розв'язання цієї задачі можемо зробити цікаві висновки. А саме: коли двочлен виду $ax + by$ ділиться на N, то завжди знайдуться такі x і y, що можна знайти безліч двочленів $cx + dy$, які діляться на N.

63. Доведення аналогічне до задачі 62. Для числових прикладів (скільки завгодно) досить розглянути випадок, коли кожен з доданків суми ділиться на 13. Дістанемо $8 \cdot 13m + 13n$ і $11 \cdot 13m + 3 \cdot 13n$. При $m = 1$, $n = 1$ маємо числа 117 і 182, які діляться на 13.

Надаючи змінним m і n довільних значень, можна дістати скільки завгодно числових прикладів. Для загального випадку розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x + y = 13a, \\ 11x + 3y = 13b; \end{cases} \qquad \begin{cases} 24x + 3y = 39a, \\ 11x + 3y = 13b; \end{cases}$$

$$13x = 39a - 13b, \qquad x = 3a - b, \; y = 8b - 11a.$$

Вирази	$a = 1$, $b = 2$ $x = 1$, $y = 5$	$a = 2$, $b = 3$ $x = 3$, $y = 2$	$a = 3$, $b = 4$ $x = 5$, $y = -1$
$8x + y$	13	26	39
$11x + 3y$	26	39	52

64. ***Доведення.***

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11a, \\ 2x + 3y = 11b; \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 6y = 33a, \\ 4x + 6y = 22b; \end{cases}$$

$11x = 33a - 22b, \qquad x = 3a - 2b,\ y = 5b - 2a.$

Вирази	$a = 2,\ b = 1$ $x = 4,\ y = 1$	$a = 4,\ b = 3$ $x = 6,\ y = 7$	$a = 5,\ b = 3$ $x = 9,\ y = 5$
$5x + 2y$	22	44	55
$2x + 3y$	11	33	33

65. $n = 7x + 5$, $m = 7y + 3$. Розглянувши добуток $mn = 49xy + 21x + 35y + 15$, бачимо, що перші три доданки суми діляться на 7, а 15 при діленні на 7 дає остачу 1.

66. $x = 11a + 7$, $y = 11b + 8$.
$xy = (11a + 7)\cdot(11b + 8) = 121ab + 88a + 77b + 56 = 11\cdot(11ab + 8a + 7b) + 55 + 1$. Цей вираз при діленні на 11 дає остачу 1.

67. Роблячи розрахунки, аналогічні до попередньої задачі, знаходимо, що $5\cdot 6 = 30 \vdots 15$.

68. Розклавши суму кубів на множники, знаходимо, що $(625^3 + 175^3) = (625 + 175)(625^2 - 625\cdot 175 + 175^2) \vdots 800$.

69. Виходимо з того, що чорних кульок може бути 1 або 2, матимемо білих, червоних і чорних кульок відповідно 6, 13, 1 або 12, 6, 2.

70. У двоцифрових числах 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 закреслено одну цифру.

71. $3^{303} > 2^{454}$, бо $3^{303} = 3\cdot 3^{302} = 3\cdot 9^{151}$, а $2^{454} = 2\cdot 2^{453} = 2\cdot 8^{151}$.

72. Згрупуємо члени суми по два: $2 + 2^3 = 2(1 + 4) = 2\cdot 5$; $2^5 + 2^7 = 2^5(1 + 4) = 2^5\cdot 5$; ... $2^{97} + 2^{99} = 2^{97}(1 + 4) = 2^{97}\cdot 5$. Кожний доданок має множник 5, отже, дана сума ділиться на 5. Крім того, вона ділиться й на 10.

73. Запишемо числа з приписаною цифрою 6 зліва і справа: $\overline{6abcde}$ і $\overline{abcde6}$. Відповідно до умови задачі складаємо рівняння: $\overline{abcde6}\cdot 4 = \overline{6abcde}$. Тепер замість букв відновимо цифри у такому записі:

$$\begin{array}{r} \times\ \overline{abcde6} \\ 4 \\ \hline \overline{6abcde} \end{array}$$

і знайдемо шукане число: 615 384.

74. Розглянемо послідовність (арифметичну прогресію з різницею 1): 1, 2, 3, 4, ..., 1983, 1984. Неважко бачити, що $1 + 1984 = 2 + 1983 = 3 + 1982 = \ldots = 991 + 994 = 992 + 993 = 1985$. Тому подану в умові задачі суму запишемо як суму двочленів: $(1 + 1984^3) + (2^3 + 1983^3) + ... + (991^3 + 994^3) + (992^3 + 993^3)$.

Розклавши кожний двочлен (суму кубів) на множники, дістанемо, що один із множників (1 + 1984) = (2 + 1983) = ... = 1985, який виносимо за дужки. Отже, ця сума ділиться на 1985.

75. Двоцифрові числа 16, 25, 36, 49, 64, 81 є квадратами цілих чисел. З цих чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ складаємо число $\overline{abcde}$. Таким числом є 81 649.

76. Міркуємо так. Шукане число має ділитися на 5, 4, 9, тому повинне закінчуватися цифрою 0. Передостання цифра (справа) такого числа може бути 2, 4, 6, 8. Третя і четверта цифри (рахуючи справа наліво) мають бути такими, щоб утворене число ділилося на 9. Звичайно, будемо враховувати, щоб цифри в кожному числі були різними:

1) 1620, 6120, 3420, 4320, 9720, 7920; (6)
2) 2340, 3240, 5940, 9540, 6840, 8640; (6)
3) 1260, 2160, 3960, 9360, 4860, 8460, 5760, 7560; (8)
4) 1980, 9180, 3780, 7380, 4680, 6480. (6)

Відповідь. Таких чисел 26.

77. Міркуємо так. Шукане число має ділитися на 5, 8, 9, тому повинне закінчуватися цифрою 0. Передостання цифра (справа) такого числа може бути 2, 4, 6, 8. Третя справа цифра повинна бути такою, щоб утворене число ділилося на 8. Отже, маємо трицифрові числа, які діляться на 40:

1) 120, 320, 520, 720, 920;
2) 240, 640, 840;
3) 160, 360, 560, 760, 960;
4) 280, 480, 680.

Тепер перед кожним трицифровим числом запишемо таку цифру, щоб утворене чотирицифрове число ділилося на 9. Тоді утворені числа ділитимуться на 360. Отже, шукані числа такі:

1) 6120, 4320, 9720, 7920; (4)
2) 3240, 8640, 6840; (3)
3) 2160, 9360, 7560, 5760, 3960; (5)
4) 6480, 4680; (2)

Відповідь. Таких чисел 14.

78. 1) До першого числа додамо 2, а друге число (8) збільшимо вдвічі. Дістанемо третє число (16), до якого, додавши 2, матимемо четверте число (18). Помноживши четвертий член на 2, матимемо 36. Дістаємо ряд: 6, 8, 16, 18, 36, 38, 76, 78, 156, ...

2) до першого числа додати 9 (24), до другого числа додати 11 (35) і т.д. 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, ...

3) почергово додавати 2 і 20: 9, 11, 31, 33, 53, 55, 75, 77, ...

4) почергово додавати 1 і 3: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, ...

5) почергово додавати 2 і 3: 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 21, 23, 26, ...
6) 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, ...;
$4n + 3$, де n — натуральне;
7) 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, ...;
$2n + 5$, де n — натуральне;
8) 5, 7, 11, 19, 35, 67, 131, 259, ...;
$2^n + 3$, де n — натуральне;
9) 5, 11, 29, 83, 245, 731, 2189, ...;
$3^n + 2$, де n — натуральне.

79. 1) послідовно додавати 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...
2) послідовно додавати 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...
3) послідовно додавати 3: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...
4) почергово додавати 2 і 1: 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, ...
5) почергово додавати 1 і множити на 2: 2, 3, 6, 7, 14, 15, 30, 31, 62, 63, 126, 127, ...
6) почергово множити на 2 і додавати 5: 5, 10, 15, 30, 35, 70, 75, 150, 155, 360, 365, ...
7) почергово додавати 5 і віднімати 3: 1, 6, 3, 8, 5, 10, 7, 12, 9, 14, 11, 16, 13, 18, 15, 20, 17, ...
8) почергово додавати 2 і множити на 2: 1, 3, 6, 8, 16, 18, 36, 38, 76, 78, 156, 158, ...
9) почергово множити на 5 і додавати 2: 2, 10, 12, 60, 62, 310, 312, 1560, 1562, 7810, ...

80. Розкласти на множники НСК і НСД, і з цих множників утворити відповідні пари натуральних чисел. (336; 12), (48; 84).
81. (168; 24).
82. (168; 12), (84; 24).
83. (105; 30), (210; 15).
84. (420; 30), (210; 60).
85. (1260; 105), (420; 315).
86. (1260; 30), (630; 60), (420; 90), (210; 180).
87. (2310; 77), (1155; 154), (770; 231), (462; 385).
88. Розкласти НСК і НСД на множники і утворити з них трійки чисел, що відповідають умові задачі: (420; 60; 84), (420; 60; 12), (420; 12; 84), (420; 300; 84), (420; 300; 12), (84; 60; 12).

До стор. 34—35

Виходячи з ознаки подільності на 3, підкреслюємо, що ділене записане одиницями (двійками, четвірками і т.д.) має містити число одиниць (двійок, четвірок і т.д.), кратне трьом.

1. Число 111...11 має вміщати число одиниць, кратне відповідно 2, 3, 4, 5 і т.д.

2. $33 = 3 \cdot 11$. Ділене має ділитися на 3 і 11 одночасно. Отже, у ньому має бути парна кількість одиниць, і при тому така, що ділиться на 3, тобто — 6 одиниць.

3. Такі числа мають ділитися на 3 і 1111 одночасно (бо $3333 = 3 \cdot 1111$), отже, число одиниць у діленому має бути кратним 3 і 1111 одночасно. Тобто, у діленому має бути найменше число одиниць 12.

4. Треба враховувати подільність чисел на 9. Найменше таке число містить дев'ять одиниць.

5. Оскільки $259 = 7 \cdot 37$, то шукане число має ділитися на 7 і 37 одночасно. Число 111 кратне 37, то числа, у яких число одиниць кратне 3, діляться на 37. Тепер подивимось, чи число, записане одиницями, ділиться на 7. Таке число є, воно записане шістьома одиницями. Отже, найменша кількість одиниць у діленому — 6.

6. Число має ділитися на 7 і на 111. Число, що ділиться на 111, має число одиниць, кратне 3. Число, що ділиться на 7, має шість одиниць, отже, шукане ділене записане шістьома одиницями.

7. Ділене має ділитися на 7 і 1111 одночасно. Отже, воно має бути записане дванадцятьма одиницями.

8. Ділене має ділитися на 9 і 111 одночасно. Але, щоб ділене ділилося на 999, цієї умови недостатньо (оскільки 999 ділиться на 27, а число, записане дев'ятьма одиницями, не ділиться на 27). Отже, у запису діленого має бути щонайменше 27 одиниць.

9. Так.

10. Так.

11. Оскільки $\underbrace{111...11}_{2n \text{ одиниць}}$ ділиться на $\underbrace{111...11}_{n \text{ одиниць}}$, маємо:

$$\underbrace{111...11}_{2n \text{ одиниць}} - \underbrace{222...22}_{n \text{ двійок}} = \underbrace{111...11}_{n \text{ одиниць}} \cdot 1\underbrace{000...0}_{n-1 \text{ нулів}}1 - 2 \cdot \underbrace{111...11}_{n \text{ одиниць}} =$$

$$= \underbrace{111...1}_{n \text{ одиниць}} \cdot (1\underbrace{000...0}_{n-1 \text{ нулів}}1 - 2) = \underbrace{111...1}_{n \text{ одиниць}} \cdot \underbrace{999...9}_{n \text{ дев'яток}} = 9(\underbrace{111...1}_{n \text{ одиниць}})^2 = (\underbrace{333...3}_{n \text{ трійок}})^2.$$

Отже, ми прийшли до висновку, що $\underbrace{111...1}_{2n \text{ одиниць}} - \underbrace{222...2}_{n \text{ двійок}} = (\underbrace{333...3}_{n \text{ трійок}})^2$.

12—15. Помноживши члени рівності $\underbrace{111...1}_{2n \text{ одиниць}} - \underbrace{222...2}_{n \text{ двійок}} = (\underbrace{333...3}_{n \text{ трійок}})^2$ (див. 11) відповідно на 2, 3, 4, 5, дістанемо розв'язки цих задач.

До стор. 46

1. $44° + 44° = 88°$, $90° - 88° = 2°$, $2° + 2° = 4°$.
2. $90° - 77° = 13°$, $13° \cdot 7 = 91°$, $91° - 90° = 1°$, $1° \cdot 11 = 11°$.
3. $13° \cdot 2 = 26°$, $30° - 26° = 4°$, $45° + 4° = 49°$.
4. Можна побудувати будь-який кут з цілим числом градусів.
5. Можна побудувати кути, значення яких кратні 3.
6. Можна побудувати кути, значення яких кратні 5.
7. Можна побудувати кути, значення яких кратні 15.
8. $36° - 30° = 6°$.
9. На: 2, 3, 6, 9, 18 (бо можна побудувати кут 3°).
10. $5° \cdot 13 = 65°$, $69° - 65° = 4°$, $4° : 4 = 1°$, $1° \cdot 23 = 23°$.
11. Задача зводиться до побудови кута 1°. $35° \cdot 2 = 70°$, $90° - 70° = 20°$, $21° - 20° = 1°$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богданович М.В. Математика. 3 кл. — К.: Рад. шк., 1992.
2. Гуменяк О.В. Роздуми математика. — Рідна школа, № 3, 1993.
3. Конфорович А.Г. Вибрані математичні задачі. — К.: Рад. шк., 1981.
4. Нагибин Н.М., Калинин Е.С. Математическая шкатулка. — М.: Просвещение, 1988.
5. Сорокин П.М. Занимательные задачи по математике. — М.: Просвещение, 1967.
6. Шунда Н.М. Збірник задач з алгебри для 6—8 класів. — К.: Рад. шк., 1987.

ЗМІСТ

МАТЕМАТИЦІ МОЖНА СЛУЖИТИ,
ТА КРАЩЕ — ПОЛЮБИТИ ЇЇ 3

ЗАВДАННЯ І ЗАДАЧІ

1. Художник допомагає розв'язати задачу 5
2. "Магічні" квадрати 7
3. Слово — з букв, число — з цифр 13
4. Вихід з лабіринту 15
5. Задачі на кмітливість 17
6. Одиниця — командир дробів 20
7. Стародавні задачі 23
8. Просте — в складному, складне — в простому 26
9. З царини похідних задач 32
10. І ще раз про подільність чисел 33
11. Числові ігри 35
12. Всяка всячина 40

ВІДПОВІДІ 50

ЛІТЕРАТУРА 78

Гуменяк О. В.

Г93 Спробуй розв'яжи!: Цікаві математичні задачі. — К.: ВЦ "Академія", 1998. — 80 с.

ISBN 966-580-035-3

Ця книжка зацікавить не тільки тих, хто з-поміж багатьох галузей знань віддає перевагу математиці. Небайдужим до неї буде кожен, хто розуміє, наскільки важливо володіти натренованим мисленням. А розв'язування математичних задач — найкращий спосіб такого тренування. У їх формулюваннях — не тільки математична проблема, а й зорієнтована на життєві ситуації інтрига.

Учителеві це дасть змогу урізноманітнити, зробити цікавішими уроки, актуалізувати самостійну роботу учнів. Учневі — ще раз переконатися, що задача — захоплюючий сюжет, а її розв'язування — неабияка насолода. А тим, хто любить і звик тренувати своє мислення, без цієї книжки просто не обійтися.

Г $\frac{1602010000 — 001}{ВЦ “Академія”—98}$ Без оголошення **ББК 22.1**

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Г У М Е Н Я К ОЛЕКСІЙ ВАСИЛЬОВИЧ

Спробуй розв'яжи!

ЦІКАВІ МАТЕМАТИЧНІ ЗАДАЧІ

Посібник

Редактор
М. Ю. ЗУБЧЕНКО

Технічний редактор
Т. І. СЕМЧЕНКО

Коректор
Т. В. ТИХОНОВИЧ

Здано до набору 6.06.97.
Підписано до друку 12.01.98.
Формат 60 х $84/_{16}$. Папір друк. №1.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Умовн.-друк. арк. 4,65. Умовн. фарб.-відб. 5,12.
Обл.-вид. арк. 4,64. Зам. № 8-16.

Видавничий центр «Академія»:
254119, м. Київ-119, а/с 861.
Т/ф: (044) 211-06-80, 446-84-63.

Поліграфкомбінат «Україна»
254119, Київ-119, вул. Дегтярівська, 38-44.

Видавничий центр

Академія